ЧТО ТАКОЕ ДЕДУКЦИЯ? [1]
WHAT IS DEDUCTION?

Борис Кулик

Институт Проблем Машиноведения РАН. В.О., Большой проспект, д.61, Санкт-Петербург, 199178.

В докладе обосновывается ошибочность некоторых общепринятых утверждений о сути дедуктивного метода. При этом используется математический аппарат алгебры кортежей.

Дедукция, логический вывод, следствие, алгебра кортежей

Мы с детства приучены к тому, что Шерлок Холмс использовал дедуктивный метод. А так ли это? По определению дедукция – это когда у нас имеются какие-то посылки или аксиомы и какие-то правила вывода, с помощью которых мы получаем следствия. А что делал Шерлок Холмс? Он знал некоторые факты, связанные с преступлением. Эти факты мало что говорили о мотивах преступления или о том, кто это преступление совершил. Если принять факты за аксиомы, то следствием этих фактов должно было стать некое утверждение, которое прямо указывает на того, кто преступник. Но по всем правилам логики из известных фактов такое утверждение получить было невозможно. Мысль Холмса работала в другом направлении. Он искал не доказательства, а домысливал некоторые гипотезы или факты, которые позволяли бы построить строгую логическую цепочку между известными и пришедшими в голову фактами и самим преступлением. Т.е. в данном случае дедукция была завершением мыслительной деятельности, а основная работа заключалась в том, чтобы найти не само следствие, а нечто, позволяющее его получить. Это нечто в логике называется не дедукцией, а абдукцией. Таким образом, метод Шерлока Холмса скорее абдуктивный, чем дедуктивный.

Писателю Конан-Дойлю, который называл метод Холмса дедуктивным, еще можно простить такую терминологическую ошибку. Однако в среде профессионалов распространен тезис, связанный с дедуктивным методом, который тоже не выдерживает критики. Во многих учебниках логики и в работах по искусственному интеллекту утверждается, что дедукция – это переход от общего к частному. На чем оно основано? Единственное обоснование, которое известно автору, заключается в том, что индукция это переход от частного к общему, а поскольку дедукция – это нечто другое, то отсюда следует, что она в этом качестве противоположна индукции, т.е. при дедукции совершается переход от общего к частному. Обоснование, прямо скажем, неубедительное.

На сомнительность этого утверждения о дедукции указывает даже известное правило вывода modus ponens. Формулируется оно следующим образом: если истинно A и истинно утверждение «если A то B», то B тоже истинно. Рассмотрим внимательно импликацию $A \to B$ (если A, то B). Во многих работах по математической логике в качестве знака импликации используется знак “$\supset$”, т.е. знак, который по начертанию противоположен знаку “$\subset$”, обозначающему отношение включения множеств. Поэтому, когда пишут $A \subset B$, то отсюда ясно, что B – это нечто более общее, чем A. А когда пишут $A \supset B$, то по аналогии получается, что B – это нечто более частное, чем A.

На самом же деле все наоборот. Любое логическое утверждение можно интерпретировать в виде соотношений между множествами. Если представить A и B в виде некоторых множеств (или объемов понятий) и сопоставить импликацию с отношением между этими множествами, то окажется, что импликация истинна тогда и только тогда, когда между множествами A и B справедливо отношение $A \subseteq B$. Т.е. вопреки тому, что принято в логике, B является обобщением A. Тогда правило modus ponens можно интерпретировать следующим образом: если истинно A, то любое его обобщение истинно. И при этом правило modus ponens является обязательным правилом для всех известных систем логического вывода в классической логике.

Для более строгого обоснования полученного вывода используем алгебру кортежей (АК). Об АК уже не раз говорилось на этой школе [1,2], сведения об АК можно найти в Интернете [3].

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Президиума РАН (проект 4.3 Программы №3).

Поэтому подробности о ней опустим. Здесь речь будет идти о сравнительно новых результатах исследований.

Операции алгебры множеств можно непосредственно выполнять только с однотипными АК-объектами (т.е содержащимися в одном и том же пространстве атрибутов). Если же АК-объекты имеют разные схемы отношения, то для выполнения операций с ними и проверок соотношений алгебры множеств их необходимо привести к одной схеме отношения с помощью добавления недостающих фиктивных атрибутов. Делается это просто: в схему отношения добавляется новый атрибут, а в структуру – новый столбец с фиктивными компонентами. По сути, это равносильное преобразование. За счет добавления фиктивных атрибутов любые АК-объекты можно преобразовать в однотипные.

Назовем операции и отношения алгебры множеств с АК-объектами с предварительным добавлением недостающих фиктивных атрибутов ***обобщенными операциями и отношениями*** алгебры множеств и обозначим их соответственно $\cap_G$, $\cup_G$, $\setminus_G$, $\subseteq_G$, $=_G$ и т.д. Первые две операции полностью соответствуют логическим операциям $\wedge$ и $\vee$. Отношение $\subseteq_G$ в АК соответствует ***отношению выводимости*** в исчислении предикатов. Это обстоятельство позволяет использовать принципиально новый подход к построению процедур логического вывода и проверок выводимости, представленный ниже.

Пусть задана система аксиом A_1, …, A_n, которые отображены как АК-объекты. Тогда возможно решение следующих двух задач.

1) ***Задача проверки правильности следствия***. Если задано предполагаемое следствие B, то процедура доказательства производится как проверка правильности обобщенного включения

$$(A_1 \cap_G \ldots \cap_G A_n) \subseteq_G B. \qquad (1)$$

2) ***Задача вывода произвольных следствий***. Для решения этой задачи сначала вычисляется АК-объект $A = A_1 \cap_G \ldots \cap_G A_n$, после чего производится выбор таких B_j, для которых соблюдается $A \subseteq_G B_j$. При этом можно использовать не только известные правила вывода, но и новые методы, разработанные на основе предлагаемого подхода.

Задача 1 решается стандартными методами проверки отношения включения в АК. Рассмотрим подробнее методы решения задачи 2.

При поиске вариантов возможного следствия обычно исходят из следующих предпосылок: 1) в следствии желательно использовать небольшое число переменных; 2) состав переменных нередко определяется исходя из смыслового анализа конкретной системы рассуждений.

Рассмотрим теперь формальные (т.е. без учета коллизий и смысловых ограничений) правила вывода следствий. Когда A – C-система (если это не так, то можно использовать алгоритмы преобразования D-кортежей или D-систем в C-системы), то сокращение числа переменных в B_j можно осуществить с помощью элиминации атрибутов из A (по сути это выбор из структуры определенной проекции). Доказано [3], что при таком преобразовании соотношение $A \subseteq_G B_j$ будет всегда выполняться.

При элиминации атрибутов из C-системы образуется проекция, свойства которой определяют дальнейшие действия по выводу следствий. Проекции могут быть ***полными***, т.е. содержащими все элементарные кортежи для их схем отношения и ***неполными*** в противном случае. Если проекция полная, то следствие является тавтологией и никакого интереса не представляет. Поэтому будем учитывать только неполные проекции.

Сформируем для A некоторую совокупность неполных проекций. Тогда все многообразие вариантов формирования возможных следствий B_j может быть выражено тремя правилами:

1) оставить в качестве B_j одну из неполных проекций;

2) выбрать в качестве B_j любую проекцию при условии, что в ее состав входит, по крайней мере, одна неполная проекция;

3) для выбранного по предыдущим правилам АК-объекта построить покрывающий его неполный АК-объект, добавив к нему элементарные кортежи или C-кортежи.

В качестве примера докажем справедливость одного из правил вывода натурального исчисления, которое называется правилом дилеммы:

$$\frac{A \to C, B \to C, A \vee B;}{C}.$$

Подразумевается, что из формул над чертой (*Up*) выводится формула под чертой (*Down*). Можно считать, что верхние формулы являются аксиомами, а нижняя – следствием из этих аксиом. Преобразуем конъюнкцию верхних формул в *D*-систему в схеме отношения [*ABC*]. Получим: $Up[ABC] = \left]\begin{matrix} \{0\} & \varnothing & \{1\} \\ \varnothing & \{0\} & \{1\} \\ \{1\} & \{1\} & \varnothing \end{matrix}\right[$.

Нижняя часть правила выражается как *C*-кортеж $Down[C] = [\{1\}]$. Чтобы доказать справедливость правила методами АК, нужно проверить соотношение $Up[ABC] \subseteq_G Down[C]$.

Если преобразовать $Up[ABC]$ в *C*-систему, то получим $Up[ABC] = \begin{bmatrix} \{1\} & \{0\} & \{1\} \\ * & \{1\} & \{1\} \end{bmatrix}$.

В этом случае проверку включения $Up[ABC] \subseteq_G Down[C]$ можно осуществить с помощью алгоритма полиномиальной сложности, используя соотношения и алгоритмы АК [1]. Для этого выполним следующие действия:

1) добавим фиктивные атрибуты в $Down[C]$. Получим $Down[ABC] = [*\ \ *\ \ \{1\}]$;
2) выполним проверку включения каждого *C*-кортежа из $Up[ABC]$ в $Down[ABC]$; проверка легко выполняется на основе известных соотношений АК.

На примере этой задачи можно показать, как осуществляется поиск произвольных следствий. В *C*-системе $Up[ABC]$ выделим неполные проекции. Такими проекциями будут [*C*], [*AB*], [*AC*] и [*BC*]. Для первой проекции получим $Up[C] = \begin{bmatrix} \{1\} \\ \{1\} \end{bmatrix} = [\{1\}]$, что соответствует логической формуле *C*. Проекции [*AC*] и [*BC*] дают в итоге тот же результат. Проекция [*AB*] соответствует формуле $A \vee B$.

Предложенный подход позволяет использовать алгебраические методы при решении задач логического вывода. Кроме того, он позволяет по-новому осмыслить суть логического следования в классической логике. Известно, что справедливость отношения $A \subseteq B$ означает, что *B* является *необходимым условием* или свойством *A*. Из соотношения (1) ясно, что логическое следствие является корректным не только потому, что получено на основе правил вывода, смысл которых не всегда понятен, но еще и потому, что *является необходимым условием существования антецедента*.

Соотношение (1), кроме того, является опровержением распространенного в логике и искусственном интеллекте тезиса о том, что дедукция – это переход от общего к частному. На самом деле все получается наоборот: следствие, полученное с помощью дедуктивных методов, является обобщением совокупности (конъюнкции) исходных посылок.

Литература

1. *Кулик Б.А.* Вероятностная логика на основе алгебры кортежей // Труды междунар. научной школы "Моделирование и анализ безопасности и риса в сложных системах - 2005" (СПб. 28 июня - 1 июля 2005 г.). СПб., ГОУ ВПО "СПбГУАП". 2005. С. 406-412.
2. *Кулик Б.А.* Логико-вероятностный анализ интеллектуальных систем на основе алгебры кортежей /Труды междунар. научной школы "Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах - 2007" СПб.: ГУАП, 2007. С. 137–149.
3. *Кулик Б.А.* Обобщенный подход к моделированию и анализу интеллектуальных систем на основе алгебры кортежей. // Труды VI Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'07 (Москва, 29 января – 1 февраля 2007 г.). – С. 679-715. http://logic-cor.narod.ru/0679.pdf