Есть ли логика в современном образовании?

Часть 1: Силлогистика

Кулик Борис Александрович – д-р физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник, вед. науч. сотрудник, ORCID: 0000-0001-6193-5588, ResearcherID: F-1539-2014, E-mail: ba-kulik@yandex.ru
ФБГУН Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия
Адрес: 199178, г. Санкт-Петербург, пр. Большой, В.О., 61

Аннотация. *В статье рассматриваются недостатки методик обучения классической логике, представленных в современных учебниках, и предлагаются новые методики, в основе которых лежат законы алгебры множеств.*

В первой части анализируется современный аксиоматический подход, принятый за основу современной логики на рубеже XIX и XX столетий, в результате чего из оснований логики было исключено якобы противоречивое понятие «множество». Предлагается в основаниях классической логики использовать не теорию множеств, а алгебру множеств. Показываются отличия алгебры множеств от аксиоматической теории множеств. Анализируются неоднозначности в силлогистике. Рассматривается новый основанный на законах алгебры множеств подход к моделированию и анализу рассуждений типа полисиллогизмов, отличающийся более строгой обоснованностью, простотой и более широкими аналитическими возможностями.

Во второй части показаны недостатки логического анализа на основе математической логики, предлагается новый подход к логическому анализу сложных рассуждений на основе алгебры кортежей, которая изоморфна алгебре множеств.

***Ключевые слова*:** *аксиоматический подход, силлогистика, теория множеств, алгебра множеств, круги Эйлера*

Is there logic in modern education?

Part 1: Syllogistics

Boris A. Kulik – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Senior research fellow, Leading research scientist, ORCID: 0000-0001-6193-5588, ResearcherID: F-1539-2014, E-mail: ba-kulik@yandex.ru
Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, Russia
Address: 61, Bolshoj pr., V.O., Saint Petersburg, 199178, Russian Federation

Annotation. *The article examines the shortcomings of the methods of teaching classical logic presented in modern textbooks, and suggests new methods based on the laws of algebra of sets.*

The first part analyzes the modern axiomatic approach adopted as the basis of modern logic at the turn of the XIX and XX centuries, as a result of which the allegedly contradictory concept of "set" was excluded from the foundations of logic. It is proposed to use algebra of sets rather than set theory in the foundations of classical logic. The differences between algebra of sets and axiomatic set theory are shown. Ambiguities in syllogistics are analyzed. A new approach based on the laws of algebra of sets to modeling and analysis of polysyllogism-type reasoning is considered, characterized by stricter validity, simplicity and broader analytical capabilities.

In the second part, the disadvantages of logical analysis based on mathematical logic are shown, a new approach to the logical analysis of complex reasoning based on the n-tuple algebra, which is isomorphic to the algebra of sets, is proposed.

Keywords*: axiomatic approach, syllogistics, set theory, algebra of sets***,** *Euler diagra*

Введение

О том, когда и как началась цивилизация, написано много. История, археология, этнография, философия так или иначе занимаются решением этой проблемы. Мнения на этот счет самые разные. Что касается гуманистической тенденции в цивилизации, то можно предположить, что она началась в тот момент, когда человек начал понимать, что сила и оружие или угроза силой и оружием не являются безальтернативными аргументами в многочисленных спорах. Это обстоятельство явилось мощным стимулом развития человеческого языка, который начал в дальнейшем использоваться не только как орудие разрешения споров и разногласий, но и как одно из орудий познания окружающего мира.

Во всех процессах развития цивилизации логика играет одну из важных ролей. Необходимость всеобщего знания логики обусловлена тем, что она служит преградой для многочисленных интенсивно развивающихся методов манипуляции сознания и способов обмана людей с помощью замаскированных нарушений законов логики. Сама по себе она не имеет никакого отношении к морали, но если общество живет по законам, созданным на основе определенных этических принципов, то логика, во-первых, помогает усовершенствовать законодательство так, чтобы одна и та же ситуация не влекла за собой принципиально разные правовые оценки, и, во-вторых, чтобы принятие судебных решений не зависело от желаний и воли отдельных лиц или организованных групп.

Все это говорит о том, что логика необходима во всех основных сферах общественной жизни, но в то же время преподавание логики в настоящее время осуществляется далеко не на самом высоком уровне, во-первых, потому, что логика не является обязательным предметом во многих учебных заведениях и, во-вторых, методика преподавания логики в настоящее время далека от совершенства. Именно об этом втором недостатке логического образования пойдет речь в данной статье.

Взгляд на историю логики

Одним из самых значительных открытий в логике, несомненно, является силлогистика Аристотеля, которая служила человечеству более двух тысячелетий и к настоящему времени мало изменилась. Все это время предпринимались многочисленные попытки усовершенствовать силлогистику [1], и лишь ко второй половине XIX века накопились научные результаты, которые привели в начале XX столетия к созданию математической логики и затем – многочисленного семейства неклассических логик. После этого силлогистика для многих математиков осталась как бы в стороне, и считается примитивным частным случаем логики. Но логики, философы и юристы не спешат с ней расстаться. И это оправданно, так как многие «примитивные» варианты рассуждений часто используются в повседневной практике.

В 1957 г. в Оксфорде была издана ставшая широко известной книга [2]. В ней силлогистика была представлена на языке математической логики как аксиоматическая система, и было показано, что некоторые аксиомы силлогистики несовместимы с аксиомами исчисления предикатов в математической логике. В России исследования Лукасевича в этом направлении продолжил В.А. Смирнов с учениками [3]. Однако изложение силлогистики в современных учебниках по логике осталось, по сути, в трактовке Аристотеля с некоторыми внесенными после него изменениями. Но даже в наше время эта система логического анализа имеет разные варианты, так как в различных весьма популярных учебниках логики предлагаются отличающиеся по составу и количеству списки правильных модусов силлогизма: в [4] их 15, в [5, 6] – 19, а в [7, 8, 9] – 24. Далее мы проанализируем доводы, приводящие к таким несовместимым результатам.

Рассмотрим вкратце некоторые этапы истории математической логики. В книге [1] ее развитие прослеживается со времен античности, и в этом есть своя правда. Но нельзя не учитывать то обстоятельство, что коренной перелом в развитии математической логики произошел не так давно – в конце XIX века, когда были сформулированы основы ***теории множеств*** (Г. Кантор, Р. Дедекинд и др.), открыты парадоксы теории множеств (Г. Кантор, Ч. Бурали-Форти, Б. Рассел и др.), а на рубеже XIX и XX столетий стали завоевывать популярность публикации математиков и философов, заложивших основы современного ***аксиоматического подхода*** (Г. Фреге, Ч. С. Пирс, Дж. Пеано, Б. Рассел и др.) [10]. Именно в этот период математическая логика стала развиваться в русле аксиоматического подхода без использования в своих основаниях якобы противоречивого понятия «множество». Аксиоматическая теория множеств в настоящее время рассматривается как один из подразделов математической логики [11].

В отличие от аксиом геометрии Евклида, которые понятны многим, аксиомы логики и теории множеств понятны лишь профессионалам. Например, в аксиоматической теории множеств есть аксиома бесконечности, и в то же время для определения множеств с одним элементом в этой теории, по признанию самих специалистов, потребуется выражение, содержащее несколько десятков тысяч знаков [10, с. 187 – 188]. Получается, что понятие бесконечности в теории множеств намного проще понятия единицы.

В 1941 году в США была опубликована ставшая широко известной книга Куранта и Роббинса [12], в которой в качестве дополнения к главе II (Математическая числовая система) кратко была изложена ***алгебра множеств***. Здесь авторами была высказана крамольная для современной логики мысль о том, что *законы алгебры множеств можно обосновать без аксиом, на основе одних только определений операций и отношений*. Там же были приведены примеры такого обоснования. В [13] эта тема рассматривается более подробно.

Источником противоречия в основном парадоксе теории множеств – парадоксе Рассела, является то, что в его формулировке используется допущение о том, что множество может быть элементом множества. Это видно из определения «самоприменимого» множества – это такое множество, которое является элементом самого себя. Такое допущение в некоторых разделах математики присутствует и в настоящее время. Споры на эту тему до сих пор не утихли. Но одно несомненно: в алгебре множеств это допущение необязательно – законы алгебры множеств от этого не изменятся. Обусловлено это тем, что в алгебре множеств, в отличие от теории множеств, основным (системообразующим) является не отношение принадлежности элемента и множества ($\in$), а отношение включения множеств ($\subseteq$), для которого «самоприменимость» (т. е. включение множества в самого себя) не приводит к парадоксу. Отсюда ясно, что запрет термина «множество» в логике нельзя считать обоснованным.

И еще одно. В отличие от современных логических теорий, которые с большим трудом и не всегда успешно усваиваются многими людьми с высшим образованием, алгебра множеств, как показывает опыт преподавания, легко воспринимается школьниками младших классов и даже дошкольниками. («Посмотри на эти фигурки… Найди среди них всех человечков… А теперь найди все зеленые фигурки… А теперь найди всех зеленых человечков»).

При этом основные законы алгебры множеств полностью соответствуют основным законам классической логики. Это означает, что *для обоснования классической логики нет необходимости в аксиомах*.

Некорректности в силлогистике

О величии открытия Аристотеля говорит хотя бы тот факт, что за все эти годы огромного признания в его теории анализа рассуждений мало что изменилось. Но, как мы увидим далее, в этой неизменности и есть ее недостаток.

В силлогистике сначала все кажется простым. Даны 4 типа предложений (***суждений***), которые весьма часто встречаются в повседневной речи и в рассуждениях:

A: Все *P* есть *Q* (общеутвердительное), пример: «Все крокодилы рептилии».

I: Некоторые *P* есть *Q* (частноутвердительное), пример: «Некоторые начальники головотяпы».

E: Все *P* не есть *Q* (общеотрицательное), пример: «Все жирафы не земноводные».

O: Некоторые *P* не есть *Q* (частноотрицательное)), пример: «Некоторые люди не переносят критику».

A, ***I***, ***E*** и ***O*** – общепринятые обозначения типов суждений. Иногда для этого используются строчные буквы ***a***, ***i***, ***e*** и ***o***.

Силлогизм (более точное название – ***категорический силлогизм***) состоит из трех суждений, первые два называются ***посылками***, третье – ***заключением***. В силлогизме содержатся три ***термина***, один из них встречается в двух посылках (он называется ***средним*** (**M**)), два других (***предикат*** (**P**) и ***субъект*** (**S**)) – в разных посылках. Рассмотрим силлогизм:

Пример 1:

1-я посылка: Все жирафы не хищники.

2-я посылка: Все тигры – хищники.

Заключение: Все тигры не жирафы.

Здесь термин «хищники» – средний термин, «жирафы» – предикат, а «тигры»– субъект.

Как мы увидим далее, некоторые правила силлогистики, в соответствии с которыми терминам назначается статус «предикат» и «субъект», приводит к ошибкам.

Среди различных вариантов троек суждений силлогизма (***модусов***) есть ***правильные*** и ***неправильные***. Можно сформировать 256 различных модусов силлогизма, но среди них правильными являются примерно 20 модусов. Как было сказано выше, в настоящее время у разных логиков разные мнения относительно правильности некоторых модусов. Уже одно это свидетельствует о несовершенстве теории.

Сразу хотелось бы отметить, что термин «множество», хотя и не желателен в логике, но, тем не менее, активно в ней используется, только обходными путями. Так, в учебниках по логике при обосновании правильности модусов силлогизма упоминаются всякого рода «диаграммы», «модельные схемы», «семантические схемы» и т.д., которые на поверку оказываются ничем иным, как наглядными отображениями соотношений между множествами (равенства, включения, несовместимости и т.д.).

Для того, чтобы отличить правильные модусы от неправильных, в силлогистике разработана весьма сложная система правил. Из-за их запутанности и некорректности силлогистика сейчас весьма непопулярна, хотя на самом деле, как мы увидим далее, это не столь уж и сложная и, к тому же, весьма практичная система анализа рассуждений.

В Аристотелевой силлогистике необходимо прежде всего научиться распознавать фигуру силлогизма (их четыре), Вот схемы этих фигур (*Рис. 1*):

Фигура 1	***Фигура 2***	***Фигура 3***	***Фигура 4***
1. $\mathbf{M \to P}$	1. $\mathbf{P \to M}$	1. $\mathbf{M \to P}$	1. $\mathbf{P \to M}$
2. $\mathbf{S \to M}$	2. $\mathbf{S \to M}$	2. $\mathbf{M \to S}$	2. $\mathbf{M \to S}$
$\mathbf{S \to P}$	$\mathbf{S \to P}$	$\mathbf{S \to P}$	$\mathbf{S \to P}$

Рис. 1. Фигуры силлогизма

Fig. 1. Syllogism figures

Фигуру можно легко распознать по размещению среднего термина в посылках. Например, в первой фигуре средний термин (**M**) должен быть на первом месте в первой посылке и на втором месте во второй.

Обратите внимание на первые посылки в фигурах силлогизма: в них ***могут присутствовать только предикаты*** (**P**). Таким образом, статус терминов (**S** и **P**) определяется не по содержанию, а в зависимости от порядка расположения посылок в силлогизме. Хотя имеются правила, в которых при проверке правильности модуса используется свойство «распределенности» термина [7], но и они не позволяют полностью исключить неопределенности в силлогистике.

Помимо фигур силлогизма нужно запомнить список правильных модусов в каждой фигуре. Вот один из предлагаемых вариантов (в тройках символов записаны обозначения типов суждений) [7]:

1-я фигура: ***AAA***, ***EAE***, ***AII***, ***EIO***, ***AAI***, ***EAO***.

2-я фигура: ***AOO***, ***EAE***, ***AEE***, ***EIO***, ***AEO***, ***EAO***.

3-я фигура: ***OAO***, ***IAI***, ***AII***, ***EIO, AAI***, ***EAO***,

4-я фигура: ***AEO***, ***IAI***, ***AEE***, ***EIO, AAI***, ***EAO***.

Эти правила трудно запомнить. Я, например, не один десяток лет занимаюсь логикой, но так и не сумел это сделать. Так что лучше этот список вместе со схемами фигур силлогизма повесить где-нибудь на видном месте. В следующем разделе будет предложена методика анализа рассуждений не только силлогизмов, но и полисиллогизмов. В этой методике предусматривается только 5 правил вывода, в основе которых лежат простые законы алгебры множеств.

Рассмотрим пример рассуждения:

Пример 2:

1-я посылка: Некоторые мои сослуживцы – вегетарианцы.

2-я посылка: Все мои друзья не вегетарианцы.

Заключение: Некоторые мои сослуживцы не мои друзья.

Проверим правильность этого рассуждения с точки зрения силлогистики. Ясно, что здесь «вегетарианцы» – средний термин (**M**), «мои сослуживцы» – предикат (**P**), так как он находится в 1-й посылке, «мои друзья» – субъект (**S**). Заметим, что по правилам силлогистики [7] предикат и субъект распознаются с помощью заключения. Но предположим, что у нас имеются только посылки и нам надо вывести из них правильное заключение.

Сравниваем посылки нашего силлогизма со схемами фигур.

Получаем: 1-я посылка типа ***I*** соответствует схеме $\mathbf{P \to M}$,

2-я посылка типа ***E*** соответствует схеме $\mathbf{S \to M}$**.**

Выходит, у нас 2-я фигура. Но в списке правильных модусов этой фигуры нет модуса, начинающегося с букв ***IE***. Значит, ***данный модус неправильный***.

Попробуем поменять местами посылки. В современной логике это не влияет на результаты логического вывода, за исключением случаев, когда союзом «и» соединяются формулировки последовательных событий (например, «Мой приятель опоздал на работу и получил выговор»). Если в данном предложения переставить события, то получим такое предложение «Мой приятель получил выговор и опоздал на работу». Ясно, что при перестановке смысл предложения изменился. Но здесь причина в том, что союз «и» в данном контексте подразумевается как «после чего».

В силлогистике перестановка посылок тоже допустима, но только при этом надо предикат назвать субъектом, а субъект – предикатом (иначе нарушим правила силлогистики). Теперь «вегетарианцы» – опять же средний термин (**M**), но предикатом (**P**) стали «мои друзья», а субъектом (**S**) – «мои сослуживцы».

Тогда получим: 1-я посылка типа ***E*** соответствует схеме **P** $\rightarrow$ **M**,

2-я посылка типа ***I*** соответствует схеме **S** $\rightarrow$ **M**.

Опять получилась 2-я фигура, но модус теперь начинается с букв ***EI***. Такой модус есть в списке правильных модусов 2-й фигуры – ***EIO***, а выведенное после перестановки посылок заключение как раз и относится к типу ***O***. Значит, ***силлогизм правильный***.

Получается, что в полном соответствии с правилами силлогистики мы нашли два исключающих друг друга решения. Следовательно, некоторые правила в силлогистике нуждаются в пересмотре.

Можно найти объяснение тому, почему в первом случае модус оказался неправильным. В нем «мои друзья» – субъект, поэтому в соответствии с правилами силлогистики в заключении он должен стоять на первом месте. Тогда получим такое заключение «Некоторые не мои друзья – мои сослуживцы». С точки зрения современной логики смысл заключения при этом не изменился. Но в традиционной силлогистике отрицание первого термина в суждении запрещено, поэтому данный модус распознается как неправильный.

Рассмотренные примеры, иллюстрирующие неоднозначность правил силлогистики, не сразу приходят в голову, но есть пример, который прямо бросается в глаза. Речь идет о широко известном модусе *Barbara* (1-я фигура категорического силлогизма, модус ***AAA***). Рассмотрим пример:

Пример 3:

1-я посылка: Все птицы животные.

2-я посылка: Все воробьи птицы.

Заключение: Все воробьи животные.

Здесь «птицы» средний термин, «животные» – предикат, а «воробьи» – субъект. Ясно, что мы имеем модус ***AAA*** Фигуры 1. Но если переставить посылки, то в соответствии с правилами силлогистики получим следующий результат: данный силлогизм соответствует модусу ***AAI*** Фигуры 4, в соответствии с которым заключение должно выражаться так: «Некоторые животные – воробьи». Т.е. перестановка посылок в силлогизме привела к существенному увеличению неопределенности заключения.

Существенное изменение результатов анализа на основе правил силлогистики при перестановке посылок в силлогизме не такое уж редкое явление. Используя предложенную схему, можно доказать, что при перестановке посылок превращаются в неправильные следующие правильные модусы категорического силлогизма (в скобках обозначены номера фигур): ***EIO***(1), ***AOO***(2), ***EIO***(2), ***OAO***(3), ***EIO***(3), ***EIO***(4). Это означает, что некоторые безусловно правильные рассуждения распознаются в силлогистике как неправильные.

В то же время существуют модусы силлогизма, которые при изменении порядка посылок преобразуются в другие правильные модусы, например, ***EAE***(1) в ***AEE***(4) или ***EAE***(2) в ***AEE***(2).

Анализ полисиллогизмов на основе законов алгебры множеств.

Изменить неоднозначные правила традиционной силлогистики почему-то никто не решается (по крайней мере, в учебниках по логике это не отражено). Но было предложено другое решение проблемы [13, 14, 15]. В основе этого решения лежит метод анализа рассуждений типа ***полисиллогизмов*** (т.е. рассуждений с произвольным числом суждений) на основе одного из вариантов частично упорядоченных множеств. Этот вариант назван *структурой Эйлера* (или сокращенно *E*-структурой). В данной статье используется упрощенный подход к описанию этой методики – на основе лишь некоторых законов алгебры множеств.

Для тех, кто не изучал (или забыл) алгебру множеств, объясню с помощью рисунков некоторые ее основные соотношения. Кстати, эти рисунки (***«круги Эйлера»***) еще в XVIII веке придумал Леонард Эйлер. Он пользовался ими для объяснения силлогизмов в письмах к двум принцессам (дочерям маркграфа Бранденбург-Шведт), которых обучал физике и философии по переписке. Эта переписка была опубликована [16], а объяснения Эйлера, по-видимому, послужили в дальнейшем для ряда ученых своеобразным толчком к созданию теории множеств и алгебры множеств.

В математике запись $S = \{a, b, c\}$ означает то, что множество S состоит из элементов a, b и c. Знак $\in$ используется в алгебре множеств для обозначения ***отношения принадлежности*** данного элемента данному множеству (например, $b \in S$), а знак $\subseteq$ – для обозначения ***отношения***

включения множеств (точный перевод: *включено или равно*). С помощью кругов Эйлера отношение $A \subseteq B$ изображается так, как показано на *Рис. 2*.

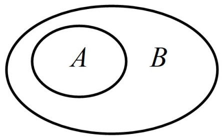

Рис. 2. Иллюстрация отношения $A \subseteq B$ с помощью кругов Эйлера
Fig. 2. Illustration of the relation $A \subseteq B$ using Euler circles

Обозначение $\overline{A}$ используется для ***операции дополнения*** множества A. Чтобы вычислить дополнение множества, необходимо знать ***универсум***, в котором это множество задано (например, в качестве универсума для множества моих друзей можно выбрать множество моих знакомых). Обозначим универсум знаком $\boldsymbol{U}$, а на рисунках будем его изображать в виде прямоугольника. Тогда дополнение множества A (т. е. $\overline{A}$) отобразится не закрашенной областью прямоугольника $\boldsymbol{U}$ (*Рис. 3*).

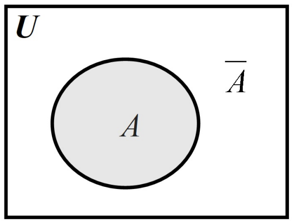

Рис. 3. Дополнение множества A
Fig. 3. Complement of the set A

В алгебре множеств помимо дополнения имеются еще две основные операции – ***пересечение*** ($\cap$) (*Рис. 4*) и ***объединение*** ($\cup$) (*Рис.5*). Результаты операций закрашены серым цветом.

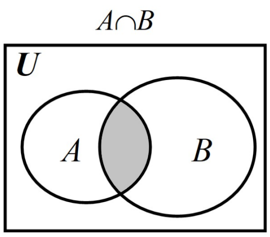

Рис. 4. Пересечение множеств A и B
Fig. 4. Intersection of sets A and B

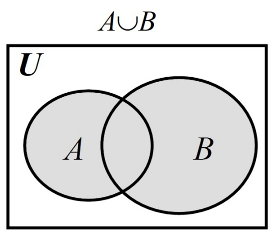

Рис. 5. Объединение множеств A и B
Fig. 5. Union of sets A and B

В алгебре множеств также используется термин ***пустое множество*** ($\varnothing$). На *Рис. 6* показана ситуация, когда при пересечении множеств A и B получается $A \cap B = \varnothing$.

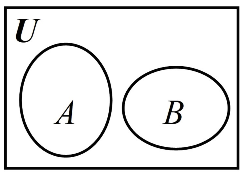

Рис. 6. Непересекающиеся множества
Fig. 6. Disjoint sets

На рисунке также видно, что для этой ситуации верны следующие соотношения: $A \subseteq \overline{B}$ и $B \subseteq \overline{A}$.

Сначала рассмотрим, как выражаются суждения в алгебре множеств. Пусть термины в суждениях обозначают имена некоторых множеств (млекопитающих, вегетарианцев, путешествующих по Кавказу, работающих в фирме «Гвоздь», и т.д.). Заодно расширим (по сравнению с силлогистикой) возможный состав типов суждений.

Во-первых, разрешается использовать отрицание первого термина в суждении (например, «Все (или Некоторые) ***не*** *P* есть *Q*») – в традиционной силлогистике это запрещено, хотя имеются работы логиков, в которых такое расширение допускается (негативная силлогистика).

Во-вторых, вместо единственного второго термина в суждениях допускается использовать несколько терминов (например, «Все *P* есть (*Q* и не *R*))». По сути, мы соединяем тем самым в одном суждении несколько разных суждений (в данном случае «Все P есть Q» и «Все P не есть R»).

Тогда суждение типа ***A*** запишется как $P \subseteq Q$, суждение типа ***E*** – как $P \subseteq \overline{Q}$, а суждение «Все P есть (Q и не R)» – как $P \subseteq (Q \cap \overline{R})$ или как два суждения, соединенные союзом «и»: $P \subseteq Q$ и $P \subseteq \overline{R}$.

С «***частными***» суждениями (типы ***I*** и ***O***) поступим так: обозначим греческими буквами (α, β и т. д.) некоторые безымянные (***вспомогательные***) непустые множества. Тогда суждение типа ***I*** (Некоторые P есть Q) выражается как $\alpha \subseteq (P \cap Q)$ (т.е. множества P и Q имеют непустое пересечение), а суждение типа ***O*** (Некоторые P не есть Q) – как $\beta \subseteq (P \cap \overline{Q})$.

В качестве ***правил логического вывода*** в полисиллогистике достаточно использовать только четыре ***закона алгебры множеств***:

Правило 1: (контрапозиции): $A \subseteq B$ равносильно $\overline{B} \subseteq \overline{A}$;

Правило 2: (двойного дополнения); $\overline{\overline{A}}$ равносильно A;

Правило 3: (транзитивности): если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$;

Правило 4: (условие непустого пересечения множеств): если $\alpha \neq \varnothing$, и известно, что $\alpha \subseteq A$ и $\alpha \subseteq B$, то справедливо $(A \cap B) \neq \varnothing$, что на языке силлогистики означает «Некоторые A есть B».

Для понимания закона контрапозиции (Правило 1) рассмотрим *Рис. 7*.

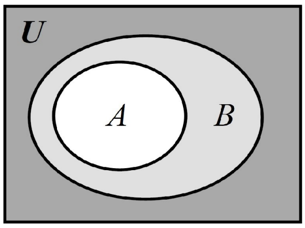

Рис. 7. Закон контрапозиции
Fig. 7. The law of contraposition

Здесь ясно, что $A \subseteq B$. Тогда дополнением области A (т.е. $\overline{A}$) является вся закрашенная область, а дополнение области B (т.е. $\overline{B}$) закрашено темным цветом. Нетрудно убедиться, что область $\overline{B}$ включена в область $\overline{A}$.

Закон двойного дополнения (***Правило 2***) используется в случаях, когда после применения правила контрапозиции некоторые термины имеют двойное дополнение. Например, суждение $A \subseteq \overline{B}$ преобразуется в $\overline{\overline{B}} \subseteq \overline{A}$. Применив к первому термину этот закон, получим $B \subseteq \overline{A}$.

Закон транзитивности (***Правило 3***) иллюстрируется на *Рис. 8*.

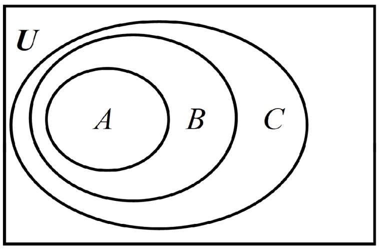

Рис. 8. Закон транзитивности
Fig. 8. The law of transitivity

Вывод существенно упрощается, когда сначала для всех посылок используются Правила 1 и 2, а уже после этого Правила 3 и 4.

Присвоение статуса «предикат» и «субъект» терминам имеет смысл только в общих суждениях: в них «субъектом» является первый термин, а «предикатом» – второй. Это соответствует отношению включения множеств: совокупность объектов, соответствующих субъекту, включена в совокупность, связанную с предикатом. Что касается частных суждений, то в них оба термина «равноправны» - их можно менять местами, от этого смысл суждения не изменяется. Например, суждение «Некоторые студенты не знают алгебры множеств» равносильно по смыслу суждению «Некоторые люди, не знающие алгебру множеств, студенты». В то же время в правилах силлогистики данное «равноправие» терминов в частных суждениях не принимается во внимание.

Назовем обозначения терминов и их дополнений ***литералами***. Для более полного анализа результатов логического анализа полисиллогизмов необходимо знание следующих ситуаций, которые называются ***коллизиями***:

Коллизия парадокса распознается, если при выводе следствий получен результат типа $A \subseteq \overline{A}$ (например, «Все прямые – не прямые»). По законам алгебры множеств это означает, что термин A в данном рассуждении соответствует пустому множеству.

Коллизия цикла возникает, если при выводе следствий получена цепочка, начинающаяся и заканчивающаяся одним и тем же литералом, например, $C \subseteq \overline{B} \subseteq \overline{A} \subseteq C$. Это означает, что все литералы, входящие в цикл, обозначают одно и то же множество. В некоторых случаях это свидетельствует о логической ошибке (в частности, подмене терминов).

В книгах [13, 14] для анализа полисиллогизмов также предлагается к знаниям основ алгебры множеств добавить знание начальных понятий *теории графов* и *частично упорядоченных множеств*. Но оказывается, что можно сравнительно легко анализировать полисиллогизмы и без этих дополнительных знаний.

Чтобы существенно упростить анализ полисиллогизмов, будем использовать ***схемы***, в которых отношение $\subseteq$ изображается линией со стрелкой, например, $P \subseteq \overline{Q}$ изображается как $P \to \overline{Q}$.

Также примем, что для каждого имени множества (например, B, $\overline{Q}$, δ) в схеме обязательно содержится его дополнение ($\overline{B}$, Q, $\overline{\delta}$).

Для удобства будем записывать литералы в двух строках, в верхней строке расположим все позитивные литералы (т.е. без знака дополнения), а в нижней – все негативные, причем термин и его дополнение разместим друг под другом.

Для иллюстрации метода рассмотрим полисиллогизм:

Пример 4:

1) Все мои друзья хвастуны и не скандалисты.

2) Все хвастуны не уверены в себе.

3) Все не скандалисты уверены в себе.

Что из этого следует?

Обозначим *Д* – мои друзья, *Х* – хвастуны, *С* – скандалисты, *У* – уверенные в себе. Затем нарисуем схему, в которой изобразим все посылки. Тогда получим такое изображение (*Рис. 9*):

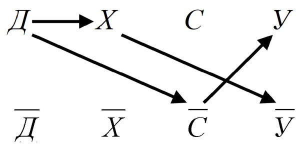

Рис. 9. Схема посылок Примера 4

Fig. 9. The scheme of the premises of Example 4

На следующем этапе добавим к посылкам на схеме их контрапозиции. Для этого можно применить следующие простые правила, которые соответствуют приведенным выше правилам вывода:

1) Если суждение представлено горизонтальной стрелкой, то его контрапозиция рисуется в другой строке, но стрелка при этом направлена в противоположную сторону.

2) Если суждение представлено наклонной стрелкой, то его контрапозиция рисуется как наклонная стрелка, соединяющая противоположные литералы, при этом направление стрелки (вверх или вниз) остается неизменным.

С учетом приведенных правил, нарисуем контрапозиции всех посылок с помощью пунктирных стрелок. Тогда получим (*Рис. 10*):

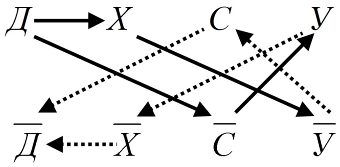

Рис. 10. Посылки и следствия Примера 4

Fig. 10. Premises and consequences of Example 4

Найдем на этом рисунке ***начальные литералы***, т.е. те, в которые не входит ни одна стрелка. В некоторых случаях, когда все литералы участвуют в циклах, такое сделать невозможно, но в данном примере можно найти один начальный литерал. Это литерал *Д*. Теперь начнем «перемещаться» по направлениям стрелок, чтобы выявить цепочки литералов и использовать правило транзитивности для получения новых следствий. В итоге сформируются следующие цепочки: 1) $Д \subseteq \overline{C} \subseteq У \subseteq \overline{X} \subseteq \overline{Д}$; 2) $Д \subseteq X \subseteq \overline{У} \subseteq C \subseteq \overline{Д}$.

В обоих цепочках получилась коллизия парадокса $Д \subseteq \overline{Д}$, которая означает безрадостную для меня ситуацию: анализ показал, что $Д$ – пустое множество. Впрочем, эту ситуацию можно исправить, если предположить, что одна из заданных посылок не совсем точна. Допустим, неверна 3-я посылка, и вместо нее надо использовать обратное утверждение: «Все уверенные в себе не скандалисты». Тогда (можете проверить сами) ситуация в корне изменится – друзья у меня все-таки есть.

Чтобы понять, как в данной системе моделируются случаи, когда из посылок выводятся заключения с частными суждениями (***I*** и ***O***), нарисуем схему для Примера 2:

Обозначим C – мои сослуживцы, $Д$ – мои друзья, B – вегетарианцы. Тогда посылки можно выразить так: 1) $\alpha \subseteq (C \cap B)$; 2) $Д \subseteq \overline{B}$, а схема посылок и их контрапозиций будет выглядеть, как на *Рис. 11*:

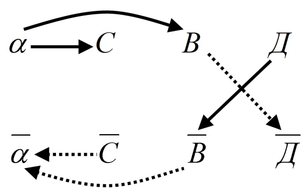

Рис. 11. Схема рассуждения Примера 2
Fig. 11. The reasoning scheme of Example 2

Найдем на схеме начальные литералы. Их три (α, $Д$ и $\overline{C}$), но для вывода частного заключения по Правилу 4 в силлогизмах интерес представляет литерал, из которого выходят более одной стрелки, т.е. в данном примере – литерал α. Из него «достижимы» литералы C и $\overline{Д}$, а это в соответствии с Правилом 4 означает, что пересечение соответствующих множеств не пусто, что подтверждает корректность заключения силлогизма «Некоторые мои сослуживцы не мои друзья». И этот вывод не зависит от порядка расположения посылок и от того, какой статус (**M**, **S** или **P**) присвоен терминам. Тем более, вывод не зависит от того, какой фигуре силлогизма соответствует данный модус.

С помощью Правил вывода 1 – 4 можно доказать следующие модусы (в скобках указаны номера фигур): ***AAA***(1), ***EAE***(1), ***AII***(1), ***EIO***(1), ***AOO***(2), ***EAE***(2), ***AEE***(2), ***EIO***(2), ***OAO***(3), ***IAI***(3), ***AII***(3), ***EIO***(3), ***IAI***(4), ***AEE***(4), ***EIO***(4) (проверка этого предоставляется читателю в качестве упражнения). Стоит отметить, что это как раз те модусы, которые признаны правильными в [4] и которые доказуемы в математической логике [17].

Анализ остальных правильных и предположительно правильных модусов категорического силлогизма приведен в следующем разделе.

Анализ разночтений в списках правильных модусов

Подход к анализу силлогизмов на основе алгебры множеств позволяет найти объяснение для неоднозначностей в списках правильных модусов. Рассмотрим сначала, почему в одном случае правильными считаются 19 модусов (учебники [5, 6]), а в другом – 24 (учебники [7, 8, 9]).

Дело в том, что во всех вариантах силлогистики [4 - 9] имеются пять правильных модусов, у которых в заключении содержатся общие суждения (типы ***A*** и ***E***). К ним относятся: модусы ***AAA*** и ***EAE*** Фигуры 1, модусы ***EAE*** и ***AEE*** Фигуры 2 и модус ***AEE*** Фигуры 4. Во всех остальных правильных модусах заключения представлены частными суждениями (типы ***I*** и ***O***). Многие логики считают, что вывод общего суждения также означает справедливость соответствующего ему частного суждения. Например, если заключением силлогизма является суждение «Все A не есть B», то это означает, что из тех же посылок можно вывести суждение «Некоторые A не есть B». Именно это мнение приводит к тому, что к списку из 19 правильных модусов, содержащемуся в ряде руководств по логике, включая [5, 6], в учебниках [7, 8, 9] добавлены еще 5 якобы правильных («ослабленных») модусов, а именно: модусы ***AAI*** и ***EAO*** Фигуры 1, модусы ***EAO*** и ***AEO*** Фигуры 2 и модус ***AEO*** Фигуры 4.

Проанализируем, насколько обосновано такое мнение. Рассмотрим Пример 3 (модус ***AAA*** Фигуры 1), в котором заключением является суждение «Все воробьи животные». В соответствии с [7, 8, 9] из заданных посылок выводится также и суждение «Некоторые воробьи животные». А это означает, что в последнем суждении по сравнению с предыдущим существенно увеличивается неопределенность информации, так как в нем в соответствии с модельными схемами, представленными в этих учебниках, допускается истинность такого высказывания, как «Некоторые воробьи не животные». И здесь вопрос даже не в том, соответствует это высказывание действительности или нет. Главное в том, что это высказывание противоречит исходным посылкам.

Построим схему рассуждения. Обозначим *П* – птицы, *Ж* – животные, *В* – воробьи. Добавим к посылкам Примера 3 суждение $\alpha \subseteq (B \cap \overline{Ж})$. Тогда получим (сплошными стрелками обозначены исходные суждения, пунктирными – их контрапозиции) такую схему (*Рис. 12*):

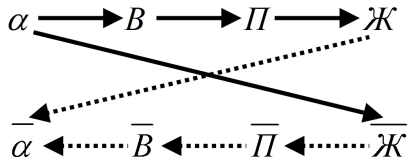

Рис. 12. Схема рассуждения Примера 3 с добавленным высказыванием
Fig. 12. The reasoning scheme of Example 3 with the added statement

Из рисунка понятно, что добавление посылки «Некоторые воробьи не животные» привело к коллизии парадокса: $\alpha \subseteq \overline{\alpha}$. Тем самым доказана некорректность увеличения неопределенности в заключении. Читатель может без особых затруднений проверить, что аналогичный анализ других модусов силлогизма, в которых допускается увеличение неопределенности общего заключения, также приводит к коллизии парадокса.

У некоторых читателей может возникнуть вопрос: На каком основании заключение «Некоторые воробьи животные» приводит к допустимости предложения «Некоторые воробьи не животные»? Оказывается, это основание содержится во многих учебниках логики, включая и те, в которых выводимость общего суждения из посылок означает выводимость соответствующего ему частного суждения [7, 8, 9 и др.]. Дело в том, что при интерпретации частных суждений с помощью модельных (или семантических) схем допускается случай, который изображен на *рис*. 13.

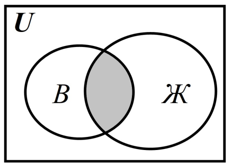

Рис. 13. Вариант интерпретации высказывания «Некоторые воробьи животные»
Fig.13. A variant of the interpretation of the statement "Some sparrows are animals"

Из рисунка видно, что не закрашенная часть множества *В* как раз и является изображением суждения «Некоторые воробьи не животные».

Рассмотрим другое несоответствие, когда в одном случае правильными считаются 15 модусов [4], а в другом – 19 [5, 6].

В книге [4] из 19-ти признанных многими логиками правильных модусов исключены следующие: модусы ***AAI*** и ***EAO*** Фигуры 3 и модусы ***AAI*** и ***EAO*** Фигуры 4. Спрашивается, чем эти модусы отличаются от остальных 15-ти модусов? Оказывается это те самые модусы, которые нельзя доказать в математической логике [17].

Рассмотрим более простое объяснение этой ситуации. Модус ***AAI*** Фигуры 4 мы уже анализировали (Пример 3). Здесь несоответствие заключается в том, что из посылок этого модуса выводится общее суждение (***A***), но при перестановке посылок согласно правилам Фигуры 4 выводится «ослабленное» частное суждение (***I***). В математической логике такое суждение не выводимо.

Остальные три неправильных с точки зрения математической логики модуса имеют одну особенность, которую мы исследуем на примере модуса ***EAO*** Фигуры 4.

Пример 5:

1-я посылка: Все летающие животные не страусы.

2-я посылка: Все страусы птицы.

Заключение: Некоторые птицы не летают.

Для большей ясности построим схему. Обозначим *А* – летающие животные, *В* – страусы, *С* – птицы. Тогда получим (*Рис. 14*):

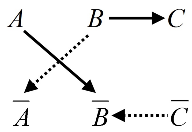

Рис. 14. Схема рассуждения Примера 5
Fig. 14. The reasoning scheme of Example 5

Из схемы понятно, что $B \subseteq (\overline{A} \cap C)$, из чего, казалось бы, используя ***Правило 4***, можно сделать вывод, что множества $\overline{A}$ и C имеют непустое пересечение, и, следовательно, справедливо высказывание «Некоторые птицы не летают». Но в математической логике вывод должен подтверждаться и в тех случаях, когда исходные термины представлены пустыми множествами. Если предположить, что $B = \varnothing$, то получим то, что пересечение $\overline{A} \cap C$ тоже может быть пустым. Это означает, что заключение «Некоторые C не есть A» при данных посылках оказывается справедливым не во всех случаях.

Данная ситуация существенно отличается от Правила 4, в котором вспомогательные термины (α, β и др.) не равны пустому множеству по определению.

Читатель может самостоятельно убедиться в том, что аналогичный анализ модусов ***AAI*** и ***EAO*** Фигуры 3 дает те же самые результаты.

Отсюда ясно, что для правильного решения модусов ***AAI*** и ***EAO*** Фигуры 3 и модуса ***EAO*** Фигуры 4 необходимо принять следующее правило:

Правило 5. Если A, B, C – основные литералы рассуждения, и задано условие $A \neq \varnothing$, то из $A \subseteq B$ и $A \subseteq C$ следует $(B \cap C) \neq \varnothing$.

Книга [14], в которой подробно изложена новая методика анализа рассуждений, была издана более 20 лет назад. В Интернете она попала в списки рекомендуемой литературы по логике, математической логике и даже по основаниям математики. Но со стороны тех, кто отвечает за качество учебной литературы по логике и публикует эту литературу, нет никакой реакции. Ни критики, ни попыток исправить неприятную ситуацию с традиционной логикой.

Заключение

1. Открытие Аристотеля по праву занимает одно из почетных мест в истории науки. Оно стало толчком в развитии не только логики, но и многих разделов математики. Но обнаруженные в силлогистике некорректности требуют иного подхода к анализу «простых» рассуждений. Почти не изменившаяся со времен Аристотеля силлогистика имеет ряд недостатков, которым, в частности, относятся: непонятность и неоправданная сложность теоретических оснований; некорректности, приводящие к неоднозначности результатов анализа рассуждений. В некоторых учебниках логики при изложении силлогистики содержатся многочисленные логические ошибки (в частности, принятие в качестве правильных некоторых некорректных рассуждений и, наоборот, опровержение некоторых правильных рассуждений).

2. Предложена основанная на алгебре множеств методика анализа рассуждений, которая имеет по сравнению с традиционной силлогистикой следующие преимущества:

1) методика математически обоснована и сравнительно проста в использовании;
2) в ней отсутствуют неопределенности традиционной силлогистики;
3) с ее помощью сравнительно легко анализируются не только силлогизмы, содержащие только две посылки, но и рассуждения, содержащие произвольное множество посылок (полисиллогизмы);
4) она позволяет анализировать логические некорректности типа парадокса или цикла и проверять корректность гипотез.

3. С помощью предложенной методики подтверждается 18 правильных модусов силлогизма. Кроме того, подтверждаются некоторые варианты рассуждений с двумя посылками, которые не считаются правильными модусами. *Не подтверждаются* модус ***AAI*** Фигуры 4 и «ослабленные» модусы, у которых общие заключения заменены частными.

Литература

1. *Стяжкин Н. И.* Формирование математической логики. М.: Наука, 1967. 508 с.
2. *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М.: Издательство иностранной литературы, 1959. 312 с.
3. *Смирнов В. А.* Логические методы анализа научного знания. М.: Наука, 1987. 256 с.

4. *Copi, I. M., Cohen, C., McMahon, K.* Introduction to Logic. New York: Routledge, 2016. 654 p. . ISBN: 978-1-292-02482-0
5. *Гетманова А.Д.* Учебник логики. Со сборником задач. М.: КНОРУС, 2011. 368 с. ISBN: 978-5-406-01197-3
6. *Бесхлебный Е.И.* Логика для юристов: учебное пособие. Москва, ЮСТИЦИЯ, 2021, 248 с. ISBN 978-5-4365-6438-8
7. *Бочаров, В. А., Маркин В.И.* Введение в логику: учебник. М. : ИНФРА-М, 2008. 560 с. ISBN 978-5-16-003360-0
8. *Томова Н.Е., Шалак В. И.* Введение в логику для философов. М.: ИФРАН, 2014. 191 с.
9. *Ивлев Ю.В.* Логика: учебник. 4-е изд., перераб. и доп. Москва: Проспект, 2022. 304 с. ISBN 978-5-392-34856-5
10. *Бурбаки Н.* Теория множеств. М.: Мир, 1965. 455 с.
11. *Mendelson, E.* Introduction to Mathematical Logic. Boca Raton, London, New York: Taylor & Francis Group, 2015 (6th ed.). 499 pp. ISBN:978-1-4822-3778-8
12. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? 3-е изд., испр. и доп. М.: МЦНМО, 2001. 568 с. ISBN 5–900916–45–6
13. *Кулик Б.А.* Логика и математика: просто о сложных методах логического анализа. СПб.: Политехника, 2020. 141 с. ISBN 978-5-7325-1166-6, doi: 10.25960/7325-1166-6
14. *Кулик Б.А.* Логика естественных рассуждений. СПб,: Невский диалект, 2001. 128 с. ISBN 5-7940-0080-5
15. *Кулик Б.А.* Логический анализ систем на основе алгебраического подхода: дис. … д-ра физ.-мат. наук. СПб., 2007. 291 с.
16. *Эйлер Л.* Письма к немецкой принцессе о разных физических и философских материях. СПб.: Наука, 2002. 720 с. ISBN 5-02-028521-8 https://vk.com/doc51458805_437847102
17. *Гильберт Д., Аккерман В.* Основы теоретической логики. Пер. с нем. А.А. Ерофеева. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1947.