Есть ли логика в современном образовании?
Ч. 2: Математическая логика

Кулик Борис Александрович – д-р физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник, вед. науч. сотрудник, ORCID: 0000-0001-6193-5588, ResearcherID: F-1539-2014, E-mail: ba-kulik@yandex.ru
ФБГУН Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия
Адрес: 199178, г. Санкт-Петербург, пр. Большой, В.О., 61

Аннотация. *В статье рассматриваются недостатки методик обучения классической логике, представленных в современных учебниках, и предлагаются новые методики, в основе которых лежат законы алгебры множеств.*

В первой части анализируется современный аксиоматический подход, принятый за основу современной логики на рубеже XIX и XX столетий, в результате чего из оснований логики было исключено якобы противоречивое понятие «множество». Предлагается в основаниях классической логики использовать не теорию множеств, а алгебру множеств. Показываются отличия алгебры множеств от аксиоматической теории множеств. Анализируются неоднозначности в силлогистике. Рассматривается новый основанный на законах алгебры множеств подход к моделированию и анализу рассуждений типа полисиллогизмов, отличающийся более строгой обоснованностью, простотой и более широкими аналитическими возможностями.

Во второй части показаны недостатки логического анализа на основе математической логики, предлагается новый подход к логическому анализу сложных рассуждений на основе алгебры кортежей, которая изоморфна алгебре множеств.

***Ключевые слова*:** *аксиоматический подход, теория множеств, алгебра множеств, язык первого порядка, исчисление высказываний, исчисление предикатов, алгебра кортежей*

Is there logic in modern education?

Part 2: Mathematical Logic

Boris A. Kulik – Dr. Sci. (Phys.-Math.), Senior research fellow, Leading research scientist, ORCID: 0000-0001-6193-5588, ResearcherID: F-1539-2014, E-mail: ba-kulik@yandex.ru
Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, Russia
Address: 61, Bolshoj pr., V.O., Saint Petersburg, 199178, Russian Federation

Annotation. *The article examines the shortcomings of the methods of teaching classical logic presented in modern textbooks, and suggests new methods based on the laws of algebra of sets.*

The first part analyzes the modern axiomatic approach adopted as the basis of modern logic at the turn of the XIX and XX centuries, as a result of which the allegedly contradictory concept of "set" was excluded from the foundations of logic. It is proposed to use algebra of sets rather than set theory in the foundations of classical logic. The differences between algebra of sets and axiomatic set theory are shown. Ambiguities in syllogistics are analyzed. A new approach based on the laws of algebra of sets to modeling and analysis of polysyllogism-type reasoning is considered, characterized by stricter validity, simplicity and broader analytical capabilities.

In the second part, the disadvantages of logical analysis based on mathematical logic are shown, a new approach to the logical analysis of complex reasoning based on the n-tuple algebra, which is isomorphic to the algebra of sets, is proposed.

Keywords: *axiomatic approach, set theory, algebra of sets, first-order language, propositional calculus, predicate calculus, n-tuple algebra*

Введение

В первой части было показано, что свойства суждений категорического силлогизма соответствуют свойствам отношения включения множеств, что позволило найти более простую математическую модель и существенно расширить аналитические возможности силлогистики и полисиллогистики. Но для многих типов рассуждений и обоснований требуются более сложные математические модели. В качестве примера рассмотрим следующую задачу [1].

Пример 6:

1-я посылка: Некоторые пациенты любят всех докторов.

2-я посылка: Ни один пациент не любит знахарей.

Следствие: Ни один доктор не является знахарем.

Оказывается, для анализа этого, на первый взгляд, простого рассуждения требуются далеко не самые простые методы математической логики (формулировка задачи на языке исчисления предикатов, сведение к предваренной нормальной форме, алгоритм унификации и т. д.). Трудности анализа в этой задаче обусловлены тем, что в посылках формулируются некоторые частные случаи бинарного отношения «x любит y», которое абстрактно можно представить в виде таблицы с двумя столбцами. В то же время следствие можно выразить в виде знакомого нам соотношения включения множеств: множество докторов включено в множество людей, не относящихся к знахарям. В силлогистике бинарные отношения не применяются, поэтому такое сочетание разных математических структур в данной задаче требует иного подхода к ее решению. Этот подход содержится в математической логике.

Посмотрим, что получится, если в математической логике использовать алгебру множеств. Выше была показана полезность такого подхода на примере силлогистики. Но удастся ли сделать нечто подобное с математической логикой?

В отличие от силлогистики математическую логику в силу ее сложности трудно изложить полностью в одной статье, поэтому здесь будет дан сравнительный анализ отдельных ее фрагментов и результатов.

Некоторые фрагменты математической логики

В современных учебниках логики (например, в [2, 3, 4]) математическая логика представлена даже в большем объеме, чем силлогистика. В данной статье в качестве основного источника знаний по математической логике будет использована наиболее популярная предназначенная для математиков книга Э. Мендельсона [5], выдержавшая с 1964 по 2015 годы 6 переизданий. На русском языке в 1971 году было опубликовано 3-е издание этой книги.

В [5] (с. 66, в русском переводе с. 65) есть текст, который достаточно четко характеризует современное состояние логики: «Поскольку семантические понятия носят теоретико-множественный характер, а теория множеств, по причине парадоксов, представляется в известной степени шаткой основой для исследований в области математической логики, то многие логики считают более надежным синтаксический подход, состоящий в изучении формальных аксиоматических теорий с применением лишь довольно слабых арифметических методов».

Обратите внимание в этой цитате на противопоставление семантического (т.е. теоретико-множественного) и синтаксического (т.е. аксиоматического) подходов. И еще одно интересное наблюдение: «шаткая основа» (теория множеств) подробно изложена в четвертой главе книги Э. Мендельсона.

Мнения некоторых логиков относительно семантических понятий существенно расходятся с мнением Э. Мендельсона. В учебниках [3, 4, 6] в качестве семантических категорий предлагается использовать предложения, а также выражения, входящие в состав предложений, включающие в себя дескриптивные и логические термины. В математической логике этим «семантическим категориям» соответствуют ***предикаты***, ***формул***ы, ***логические связки*** и др., т. е. сущности, которые входят в состав ***языка первого порядка*** в математической логике и которые тесно связаны с синтаксическим подходом [5]. К семантическим понятиям в этих учебниках скорее можно отнести круги Эйлера [6], модельные схемы [3] и семантические схемы [4], с помощью которых иллюстрируются соотношения между понятиями и обосновываются заключения в силлогизмах.

Приведенная выше цитата из [5] может служить отправной точкой для постановки следующего вопроса: можно ли в качестве математической модели для семантического подхода в математической логике использовать не «шаткую основу» в виде теории множеств, а лишенную парадоксов алгебру множеств?

Подсказка для ответа на это вопрос, хотя и не вполне отчетливая, находится в книге [5]. Она выражается в виде ***интерпретации языка первого порядка*** в математической логике. Для большей ясности предварительно рассмотрим неформально некоторые понятия, которые лежат в основе этой интерпретации.

1. ***Отношения***. Отношения предназначены для определения взаимосвязей между некоторыми элементами и объектами. В естественном языке примерами отношений, являются многие классы объектов (например, города, студенты философского факультета, литературные произведения и т. д.). Эти классы объектов в математике можно выразить двумя способами: во-первых, как множества, а, во-вторых, – как ***одноместные*** (унарные) ***отношения***. Помимо одноместных часто

используются ***многоместные*** (или n-местные) ***отношения*** – это структуры, которые можно представить в виде таблиц, строки этих таблиц являются элементами отношений (например, множество пар людей, состоящих в браке, или множество записей читателей районной библиотеки с указанием фамилии, имени, возраста, образования и т.д.). Для обозначения этих строк в математике используется термин ***кортежи*** (т. е. последовательности). Многие предложения естественного языка можно представить как элементы некоторых отношений. Например, предложение «В июне цены на смартфоны повысились» можно представить как элемент отношения «*Изменение цен*» с атрибутами *Месяц года*, *Наименование товара*, *Динамика изменения* (растут, снижаются, остаются без изменений).

Каждый элемент кортежа в отношении является значением определенного ***атрибута***. Для заданного отношения должна быть определена ***схема отношения***, т.е. последовательность атрибутов. Порядок элементов кортежа в отношении должен соответствовать схеме отношения. Например, кортеж (июнь, смартфоны, возросла) соответствует схеме отношения «*Изменение цен*».

2. ***Декартово произведение множеств*** (ДП). ДП было введено в математику в конце XIX века Г. Кантором [7]. Оно часто используется в дискретной математике, но его тесная связь с основными структурами математической логики была установлена лишь недавно при исследовании свойств новой математической структуры – алгебры кортежей [8]. Декартово произведение двух множеств – это множество всех возможных двуместных кортежей (пар) элементов, у которых на первом месте стоит элемент из первого множества, а на втором – элемент из второго множества. Например, если даны множества $X = \{a, c\}$ и $Z = \{a, f, k\}$, то их ДП можно представить в виде множества, содержащего 6 кортежей:

$X \times Z = \{(a, a), (a, f), (a, k), (c, a), (c, f), (c, k)\}$.

Аналогично определяются ДП для трех и более множеств. В этих случаях элементы ДП – это кортежи из трех и более элементов.

Если в ДП участвуют одинаковые множества, например, $D \times D \times D$, то ДП можно записывать как возведение в степень: $D \times D \times D = D^3$. Как можно использовать ДП в логическом анализе, показывает следующий пример.

Пример *7* (задача «Поиск клада»). Перед нами три пещеры, в каждой из них может быть либо клад (*К*), либо ядовитые змеи (*З*), либо пещера пуста (*П*), при этом змеи присутствуют, по крайней мере, в одной из пещер, а клад – только в одной пещере. Для поиска клада необходимо воспользоваться двумя подсказками, при этом известно, что первая подсказка истинная, а вторая – ложная:

Подсказка 1: Во второй пещере нет змей, а третья пещера не пуста.

Подсказка 2: Первая пещера не пуста, а во второй нет змей.

Требуется определить, в какой пещере находится клад.

Решение задачи будет приведено ниже. Пока же рассмотрим, как можно выразить некоторые условия задачи с помощью ДП. Перечисление всех возможных ситуаций в пещерах без учета ограничений можно получить, вычислив ДП $\{К, З, П\} \times \{К, З, П\} \times \{К, З, П\} = \{К, З, П\}^3$. В этом случае мы получим 27 разных вариантов (трехместных кортежей). Подсказку 1 можно выразить с помощью ДП $\{К, З, П\} \times \{К, П\} \times \{К, З\}$, т. е. получим 12 вариантов.

3. ***Математическое определение отношения***. В математике отношения определяются как подмножества некоторого заданного ДП. Например, для построенного выше ДП $X \times Z$ можно, выбрав из него некоторые кортежи, определить отношение $R[XZ] = \{(a, a), (c, f)\}$. Здесь R – ***имя*** отношения, X и Z – ***атрибуты*** отношения, а $[XZ]$ – ***схема отношения***. Кортежи элементов (a, a) и (c, f) являются ***элементами*** этого отношения. ***Универсум*** этого отношения – ДП $X \times Z$.

Подсказку 1 из Примера 7 тоже можно выразить отношением, заданным как ДП $\{К, З, П\} \times \{К, П\} \times \{К, З\}$ в универсуме $\{К, З, П\}^3$.

4. ***Исчисление высказываний***. Раздел математической логики, в котором исследуются формулы, содержащие ***пропозициональные переменные*** (т. е. обозначения высказываний) и ***логические связки***: $\neg$ – ***отрицание***, $\wedge$ – ***конъюнкция*** (и), $\vee$ – ***дизъюнкция*** (или), $\supset$ – ***импликация*** (если, то). В некоторых публикациях конъюнкцию обозначают знаком “&”, а импликацию – знаками “$\Rightarrow$” или “$\rightarrow$”.

Высказывания могут иметь только два значения: *истинно* либо *ложно*. Значения формул (т. е. *истинно* либо *ложно*) зависят от значений входящих в них высказываний. ***Теоремами*** (общезначимыми формулами) являются формулы, которые истинны при любых возможных значениях входящих в них высказываний (например, формула $A \vee \neg A$ истинна при любых значениях высказывания A).

5. ***Таблицы истинности***. По сути, это первая модель, с которой начинается ведение в математическую логику. Эти таблицы устанавливают истинность сложных высказываний, сформированных с помощью логических связок из простых высказываний. Например, в соответствии с этими таблицами сложное высказывание $A \wedge B$ (A и B) будет истинным только в том случае, если истинны оба простых высказывания A и B, а высказывание $A \vee B$ (A или B) истинно в случаях, когда истинно хотя бы одно из содержащихся в нем высказываний. С помощью таблиц истинности можно доказывать все теоремы исчисления высказываний.

Таблицы истинности, по сути, являются аксиомами, так как с их помощью можно доказывать теоремы математической логики. Заметим, что в основу многих неклассических логик положены измененные по сравнению с классической логикой таблицы истинности логических связок. Другими словами, если мы изменим таблицы истинности исчисления высказываний, то мы получим другую (во многих случаях неклассическую) логику.

6. ***Язык первого порядка*** $\mathcal{L}$. Это основа математической логики. В этом формальном языке предусматривается использование определенного алфавита для обозначения ***переменных***, ***констант*** (значений переменных), ***функций*** и ***предикатов***. В языке первого порядка также используются логические связки, в состав которых, помимо перечисленных выше $\neg$, $\wedge$, $\vee$ и $\supset$, входят ***кванторы*** $\forall$ (для всех) и $\exists$ (существует). Излагаются правила, с помощью которых формируются ***правильно построенные формулы*** (ППФ). Правила простые, но здесь они не приводятся.

Предикаты можно представить в естественных рассуждениях как отношения или их части. Например, предикат $M(x, y)$ может обозначать в рассуждениях отношение «x больше y» для конечной (или бесконечной) совокупности целых чисел. Данный предикат двухместный («места» находятся внутри скобок), однако в общем случае предикаты могут содержать любое число «мест». «Места» в предикатах могут заполняться не только переменными, но и константами или функциями, например $M(3, y)$ или $M(x, f(z))$. Если в предикате все «места» заполнить константами, то полученное выражение, если определена интерпретация предиката, может быть либо истинным, либо ложным. Например, в нашем случае $M(3, 2)$ – истинно, так как $3 > 2$, а $M(3, 5)$ – ложно.

«Первый порядок» в названии языка $\mathcal{L}$ означает, что переменные в ППФ не могут быть заменены предикатами или другими сложными «аргументами», в противном случае речь будет идти о языках «высших порядков» (второго, третьего и т. д.).

7. ***Исчисление предикатов первого порядка***. Язык $\mathcal{L}$, в свою очередь, используется для построения ***теории первого порядка*** K, которая формируется на основе языка первого порядка за счет добавления ***аксиом*** и ***правил вывода***, причем аксиомы делятся на два класса: ***логические*** и ***собственные*** (или нелогические). В публикациях по математической логике содержатся несколько вариантов логических аксиом для теории первого порядка, здесь приведены аксиомы из [5]. Что касается собственных (или нелогических) аксиом, то они добавляются к логическим аксиомам для построения различных теорий (например, теории групп или аксиоматической теории множеств). Если собственных аксиом нет, то теория K называется ***исчислением предикатов первого порядка***.

Логические аксиомы: если $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, и $\mathcal{D}$ – ППФ языка первого порядка, то исчисление предикатов первого порядка содержит следующие аксиомы.

(A1) $\mathcal{B} \supset (\mathcal{C} \supset \mathcal{B})$;

(A2) $(\mathcal{B} \supset (\mathcal{C} \supset \mathcal{D})) \supset ((\mathcal{B} \supset \mathcal{C}) \supset (\mathcal{B} \supset \mathcal{D}))$;

(A3) $(\neg\mathcal{C} \supset \neg\mathcal{B}) \supset ((\neg\mathcal{C} \supset \mathcal{B}) \supset \mathcal{C})$;

(A4) $(\forall x_i)\mathcal{B}(x_i) \supset \mathcal{B}(t)$;

(A5) $(\forall x_i)(\mathcal{B} \supset \mathcal{C}) \supset (\mathcal{B} \supset (\forall x_i)\mathcal{C})$.

Первые три аксиомы – это аксиомы исчисления высказываний, их можно вместе с правилами вывода использовать для доказательства теорем исчисления высказываний. Аксиомы (A4) и (A5) расширяют область их применения до исчисления предикатов. Их лаконичность впечатляет – из них выводятся все теоремы и законы классической логики.

Но понятными их трудно назвать.

Рассмотрим ***правила вывода***. Они тоже весьма лаконичны. В [5] они выражены так:

1. ***Modus ponens*** (MP): из $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B} \supset \mathcal{C}$ следует $\mathcal{C}$;
2. ***Правило обобщения*** (Gen): из $\mathcal{B}$ следует $(\forall x_i)\mathcal{B}$.

Правило MP пришло из античности, впервые оно упомянуто в трудах преемника Аристотеля Теофраста. Что касается правила Gen, то в книге Мендельсона оно выражено не совсем корректно, так как в его формулировке не выражены условия, при которых это правило применять нельзя.

Чтобы лучше понять некорректность формулировки правила Gen, рассмотрим разницу между свободными и связными переменными в формулах. Если переменная не находится в области действия какого-либо квантора, то она считается ***свободной***. Например, в формуле $\forall y(P(x) \wedge Q(x, y))$, в которой $P(x)$ и $Q(x, y)$ – предикаты, переменная y – ***связанная***, так как перед скобками, внутри которых она находится, записано выражение с квантором $\forall y$, в то время как переменная x свободная, так как перед скобками нет кванторного выражения $\forall x$. В формулировке правила Gen в [5] нет никаких сведений о присутствии или отсутствии свободной переменной x_i в формуле $\mathcal{B}$.

Можно доказать, что в случае, когда формула $\mathcal{B}$ содержит свободную переменную x_i, то формула $(\forall x_i)\mathcal{B}$ может быть следствием формулы $\mathcal{B}$ лишь в исключительных случаях (эти случаи приведены в [8]). Поэтому без учета этих условий правило Gen нельзя считать корректным.

Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов не предназначены и трудно применимы для естественных рассуждений. В искусственном интеллекте, в частности, в таких его разделах, как «Моделирование рассуждений» [9] и «Автоматическое доказательства теорем» [1], эти правила не используются в силу малой эффективности, но применяются принципиально иные методы, например, метод резолюций и алгоритм унификации [1].

Кроме того, с помощью средств математической логики трудно, а иногда просто невозможно применять многие необходимые в естественных рассуждениях методы логического анализа, такие, как формулирование и проверка гипотез, анализ неопределенностей, распознавание и анализ ошибок и некорректностей в рассуждениях, вывод следствий с заданными свойствами, поиск абдуктивных заключений и т.д. Эти методы и примеры их применения можно найти в работах по искусственному интеллекту, при этом часто они решаются с помощью неклассических логик, но в публикациях по математической логике их практически нет. Не в том ли причина, что в математической логике потеряна связь с семантикой, т.е. с ***интерпретацией***, в основе которой лежит алгебра множеств?

Интерпретация языка первого порядка

В [5] предлагается следующая интерпретация языка первого порядка: в качестве области интерпретации (*domain*) для всех переменных используется одно и то же множество D элементов (констант), а для n-местных предикатов и формул с n свободными переменными областью интерпретации является n-местное отношение, т.е. подмножество n-местных кортежей элементов из декартова произведения множеств D^n. При этом множество D не определено.

Например, в формуле $\forall y(P(x) \wedge Q(x, y))$ свободной является только переменная x. Это означает, что интерпретацией этой формулы является какое-то подмножество (возможно, пустое) области D изменения переменной x. Если бы в формуле не было квантора $\forall y$, то свободными были бы переменные x и y, а интерпретацией этой формулы было бы некоторое двухместное отношение, т.е. подмножество декартова произведения D^2. В [5] также рассматривается интерпретация функциональных символов, но здесь она не понадобится.

Предложенная в [5] интерпретация языка первого порядка по сути является упрощенным вариантом математического отношения. Упрощение выражается в том, что, во-первых, в этой интерпретации разные переменные привязаны только к одной области D, и, во-вторых, в логическом анализе представление отношений только в виде множества кортежей элементов часто приводит к сложностям при обоснованиях закономерностей, а также при формулировании условий задач и их решении. С учетом этого в изложенную в [5] интерпретацию языка первого порядка было предложено внести следующие изменения [8].

Изменение 1. Для разных переменных языка первого порядка предлагается использовать не одну какую-то область интерпретации D, а разные области интерпретации, которые соответствуют предметной области рассуждения. Поэтому по аналогии с базами данных [10] предложено имена разных областей интерпретации называть ***атрибутами***, а сами области интерпретации (т.е. множества всех значений атрибутов) ***доменами*** этих атрибутов. Например, если в качестве атрибута используются «Дни недели», то доменом этого атрибута является множество всех названий дней недели.

Изменение 2. Для обоснования закономерностей и решения многих задач логического анализа более удобно рассматривать n-местное отношение не как множество кортежей элементов, а как

ДП или их объединения. Иллюстрацией представления условий задачи в виде ДП является рассмотренный выше Пример 7. Поскольку ДП формируется из множеств, то в качестве значений атрибута используются не элементы его домена, а имена или обозначения (например, A_2 или $\{К, П\}$) всех подмножеств домена. Множества с этими именами или обозначениями названы ***компонентами*** атрибута. Короче: *компоненты – это произвольные подмножества домена атрибута*.

Исследования показали, что усовершенствованную интерпретацию языка первого порядка можно выразить с помощью алгебры множеств. Но для этого потребовалось разработать и обосновать новую математическую структуру, получившую название ***алгебра кортежей*** [8, 11]. С алгеброй множеств ее связывает то, что в ней используются те же операции (дополнение, пересечение, объединение), те же отношения (равенства и включения) и те же законы (де Моргана, контрапозиции, транзитивности, непротиворечия и т.д.). Отличие только в том, что в ней используются не обычные множества, а структуры, которые можно с помощью определенных вычислений представить множествами n-местных кортежей элементов (т.е. n-местными отношениями). Эти структуры – ***объединения ДП множеств***. Как выяснилось в процессе исследований, эти структуры вместе с их дополнениями являются интерпретациями основных типов формул математической логики.

Краткие сведения об алгебре кортежей

Объединение декартовых произведений, рассматриваемое как основной объект алгебраической системы с операциями и отношениями, ранее в математике не встречалось. Для этого объекта не были известны алгоритмы операций (дополнение, пересечение, объединение), алгоритмы проверок включения одного объекта в другой и т.д. В некоторых учебниках и руководствах по математике содержатся только алгоритмы двух операций для одиночных ДП (их пересечения и разности), а также алгоритм проверки включения одного ДП в другое. Оказалось, что формулировку всех свойств декартовых произведений и их объединений, а также обоснования этих свойств можно существенно упростить, если отказаться от общепринятых обозначений ДП (D^n, $A \times B \times C$, и т.д.). Вместо этого предложено представлять ДП как кортежи компонент, при этом каждая компонента с помощью схемы отношения привязывается к определенному атрибуту.

Алгебра кортежей (АК) – математическая система для моделирования и анализа многоместных отношений, основанная на свойствах ДП. Отношения в АК выражаются с помощью структур, которые называются ***АК-объектами***. Их всего четыре: C-кортежи, C-системы, D-кортежи и D-системы**.**

К именам АК-объектов приписывается ***схема отношения*** – заключенная в квадратные скобки последовательность атрибутов. Например, запись $R[KLM]$ означает, что отношение R является подмножеством ДП $K \times L \times M$.

Однотипными называются АК-объекты с одинаковыми схемами отношений.

Алгоритмы выполнения операций с АК-объектами, проверок включения, преобразований в другие типы и т.д. сформулированы и доказаны в АК в виде теорем. Структуры АК матричные, причем в ячейках матриц записываются не элементы, а обозначения компонент. Среди всех возможных компонент АК выделяются два типа, названных ***фиктивными компонентами***.

Полная компонента (обозначается «∗») равна домену соответствующего атрибута.

Пустая компонента (обозначается «∅») равна пустому множеству.

Перейдем к определению типов АК-объектов.

С-кортеж есть n-местное отношение, равное ДП содержащихся в нем компонент, которые записаны в виде кортежа, ограниченного квадратными скобками.

Например, подсказку 1 в Примере 7 можно выразить как C-кортеж

$M_1[C_1C_2C_3] = [\ast\ \{К, П\}\ \{К, З\}]$,

где C_1, C_2, C_3 – атрибуты, для данного примера – обозначения пещер с соответствующими номерами, а символ ∗ обозначает множество, равное домену атрибута C_1, т.е. множество возможных вариантов содержимого в данной пещере, в данном случае $\{К, З, П\}$.

Если заданы однотипные C-кортежи, то можно вычислить их пересечение или проверить включение одного C-кортежа в другой. Это можно выполнить, используя следующие теоремы (номера теорем соответствуют номерам в [8, 11]).

Теорема 1 (проверка включения однотипных C-кортежей). Пусть даны два однотипных C-кортежа $P = [P_1\ P_2\ \ldots\ P_N]$ и $Q = [Q_1\ Q_2\ \ldots\ Q_N]$. Тогда $P \subseteq Q$, если и только если $P_i \subseteq Q_i$ верно для всех соответствующих пар компонент сравниваемых C-кортежей.

Теорема 2 (пересечение однотипных C-кортежей). Пусть даны два однотипных C-кортежа $P = [P_1\ P_2\ \ldots\ P_N]$ и $Q = [Q_1\ Q_2\ \ldots\ Q_N]$. Тогда

$P \cap Q = [P_1 \cap Q_1\ \ P_2 \cap Q_2\ \ \ldots\ \ P_N \cap Q_N]$.

Теорема 3 (пустое пересечение однотипных C-кортежей). Пусть даны два однотипных C-кортежа $P = [P_1\ P_2\ \ldots\ P_N]$ и $Q = [Q_1\ Q_2\ \ldots\ Q_N]$, и в них имеется, по крайней мере, одна пара P_i и Q_i компонент, для которых $P_i \cap Q_i = \varnothing$. Тогда $P \cap Q = \varnothing$.

Рассмотрим пример использования Теоремы 2. Предположим, что в Примере 7 обе подсказки истинные. Тогда мы можем сократить число возможных вариантов, если вычислим пересечение соответствующих этим подсказкам C-кортежей, при этом необходимо учесть, что для любой компоненты A соблюдается $* \cap A = A$. Подсказку 2 можно выразить как

$M_2[C_1C_2C_3] = [\{К,\ З\}\ \ \{К,\ П\}\ \ *]$. Тогда в соответствии с Теоремой 2

$M_1[C_1C_2C_3] \cap M_2[C_1C_2C_3] = [*\cap\{К,\ З\}\ \ \ \{К,\ П\}\cap\{К,\ П\}\ \ \ \{К,\ З\}\cap *] = [\{К,\ З\}\ \ \{К,\ П\}\ \ \{К,\ З\}]$.

Теоремы 2 и 3 устанавливают, что пересечение C-кортежей, если оно не равно пустому множеству, можно выразить как C-кортеж. Однако объединение C-кортежей равно единственному C-кортежу лишь в исключительных случаях (эти случаи определены в [8, 11]). Поэтому возникает необходимость в определении структуры нового типа.

C-система – это отношение, равное объединению однотипных C-кортежей, которое записывается в виде матрицы, ограниченной квадратными скобками.

Например, $R[XYZ] = \begin{bmatrix} A_1 & * & A_3 \\ B_1 & B_2 & * \end{bmatrix}$ есть C-система, при этом $A_1 \subseteq X$, $A_3 \subseteq Z$ и т.д. Фиктивная компонента в первом C-кортеже соответствует домену атрибута Y, а во втором – домену атрибута Z. Данная C-система преобразуется в обычное отношение с помощью ДП следующим образом:

$R[XYZ] = (A_1 \times Y \times A_3) \cup (B_1 \times B_2 \times Z)$.

Использование объединений ДП позволяет получить ряд преимуществ при моделировании и анализе многоместных отношений. Рассмотрим C-систему $Q[XYZ]$, которую можно представить как объединение трех отношений, выраженных обычными таблицами.

$$Q[XYZ] = \begin{bmatrix} \{a,b,c\} & \{f\} & \{g,h\} \\ \{c\} & \{e,f\} & \{f,h\} \\ \{c,d\} & \{d,f,g\} & \{g\} \end{bmatrix} =$$

X	Y	Z
a	f	g
a	f	h
b	f	g
b	f	h
c	f	g
c	f	h

$\cup$

X	Y	Z
c	e	f
c	e	h
c	f	f
c	f	h

$\cup$

X	Y	Z
c	d	g
c	f	g
c	g	g
d	d	g
d	f	g
d	g	g

Ясно, что отображение отношений с помощью АК-объектов во многих случаях более компактно, При этом надо учесть, что компонентами АК-объектов могут быть любые, в том числе и бесконечные множества (например, множества целых чисел с определенными кратностями или системы интервалов на числовых осях).

Еще одним преимуществом является возможность моделировать и исследовать неопределенности в знаниях, так как компоненту можно представить как множество возможных вариантов значений.

С помощью C-кортежей и C-систем можно выразить любое многоместное отношение, но для вычисления их дополнений требуются новые структуры – D-кортежи и D-системы, при их определении используется промежуточная структура – диагональная C-система.

Диагональная C-система – это C-система размерности $n \times n$, у которой все недиагональные компоненты – полные ($*$).

Например, $Q[XYZ] = \begin{bmatrix} A & * & * \\ * & B & * \\ * & * & C \end{bmatrix}$ – диагональная C-система.

Доказано, что диагональная C-система есть результат вычисления дополнения некоторого C-кортежа. При этом надо учесть, что дополнение каждой компоненты вычисляется при условии, что универсумом этой компоненты является домен соответствующего ей атрибута. Например, если задан C-кортеж $R[KLM] = [A\ B\ *]$, то дополнение компоненты B (т. е. $\overline{B}$) вычисляется относительно множества L, принятого в данном случае в качестве универсума, а дополнением компоненты $*$ будет пустое множество ($\varnothing$) в любом случае.

Теорема 9. Дополнение C-кортежа $P = [P_1\ P_2\ ...\ P_{n\text{-}1}\ P_n]$ есть диагональная C-система $R = \begin{bmatrix} \overline{P_1} & * & ... & * \\ * & \overline{P_2} & ... & * \\ ... & ... & ... & ... \\ * & * & ... & \overline{P_n} \end{bmatrix}$ размерности $n \times n$, где каждая диагональная компонента – дополнение соответствующей компоненты C-кортежа P.

Рассмотрим, как можно в Примере 7 преобразовать ложную Подсказку 2 в истинную. Для этого с помощью Теоремы 9 вычислим ее дополнение.

$$\overline{M_2}\ [C_1C_2C_3] = \begin{bmatrix} \{П\} & * & * \\ * & \{З\} & * \\ * & * & \varnothing \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что третий C-кортеж в матрице содержит пустую компоненту и поэтому равен пустому множеству, можно записать окончательный результат:

$$\overline{M_2}\ [C_1C_2C_3] = \begin{bmatrix} \{П\} & * & * \\ * & \{З\} & * \end{bmatrix}.$$

Чтобы решить Пример 7, потребуется еще одна теорема АК.

***Теорема** 7* (пересечение C-кортежа и C-системы). Пусть даны однотипные C-кортеж P и C-система Q. Результатом их пересечения будет C-система, содержащая все непустые пересечения C-кортежа P с каждым C-кортежем из Q.

Истинные подсказки Примера 7, также как и посылки во многих логических задачах, являются своеобразными ограничениями. Чтобы учесть все эти ограничения, необходимо вычислить их пересечение. Тогда, используя Теорему 7, получим

$$M_1[C_1C_2C_3] \cap \overline{M_2}\ [C_1C_2C_3] = [*\ \{К, П\}\ \{К, З\}] \cap \begin{bmatrix} \{П\} & * & * \\ * & \{З\} & * \end{bmatrix} = [\{П\}\ \{К, П\}\ \{К, З\}].$$

Получился один C-кортеж, так как пересечение $[*\ \{К, П\}\ \{К, З\}]$ с $[*\ \{З\}\ *]$ в соответствии с Теоремами 2 и 3 равно пустому множеству.

Для решения задачи преобразуем полученный результат в множество обычных кортежей, вычислив ДП компонент полученного в результате вычислений C-кортежа.

$[\{П\}\ \{К, П\}\ \{К, З\}] = \{П\}\times\{К, П\}\times\{К, З\} = \{(П, К, К), (П, К, З), (П, П, К), (П, П, З)\}$.

По условиям задачи первый кортеж не подходит, так в соответствии с ним клад находится в двух пещерах, хотя по условиям задачи должен быть только в одной. Кроме того, ни в одной из пещер нет змей, что тоже не соответствует условиям задачи. Третий кортеж тоже не годится, так как в нем не предусмотрено присутствие змей хотя бы в одной пещере. Четвертый кортеж говорит об отсутствии клада во всех пещерах, что тоже не соответствует условиям задачи. Остается второй кортеж, в соответствии с которым клад находится во второй пещере.

Диагональную C-систему можно выразить более компактно с помощью определения нового типа АК-объекта.

D-кортеж – это отношение, равное диагональной C-системе и записанное как ограниченный перевернутыми квадратными скобками кортеж ее диагональных компонент.

Например, изображенную выше диагональную C-систему можно записать как D-кортеж: $Q[XYZ] =]A\ B\ C[$. Дополнение Подсказки 2 из Примера 7 тоже можно выразить как D-кортеж: $\overline{M_2}\ [C_1C_2C_3] =]\{П\}\ \{З\}\ \varnothing[$.

D-система есть отношение, равное пересечению однотипных D-кортежей и записанное как ограниченная перевернутыми квадратными скобками матрица компонент, в которой строками являются участвующие в операции D-кортежи.

Таким образом, определены все 4 типа АК-объектов. Примеры их использования в логическом анализе приведены в [8, 11].

Помимо операций алгебры множеств в АК определены операции с атрибутами, с помощью которых логические формулы с кванторами преобразуются в удобные для расчетов формулы алгебры кортежей.

Здесь мы рассмотрим две операции: добавления фиктивного атрибута (+*Atr*) и элиминации атрибута (–*Atr*).

Операция ***добавление фиктивного атрибута*** (+*Atr*) выполняется как включение имени нового атрибута *Atr* в схему отношения АК-объекта и соответствующего нового столбца с фиктивными компонентами – в матричное представление АК-объекта.

Например, пусть задана *C*-система $R_k[XZ] = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{bmatrix}$. Тогда после добавления фиктивного атрибута *Y* в $R_k[XZ]$ получим *C*-систему $+Y(R_k[XZ]) = R_m[XYZ] = \begin{bmatrix} A_1 & * & A_3 \\ B_1 & * & B_3 \end{bmatrix}$.

При выполнении операции +*Atr* в *C*-структуры добавляются фиктивные компоненты «*», а в *D*-структуры – фиктивные компоненты «∅».

Операция +*Atr* соответствует правилу обобщения (Gen) исчисления предикатов. При этом фиктивный атрибут добавляется только в том случае, если он отсутствует в схеме отношения данного АК-объекта. В исчислении предикатов это соответствует тому, что формула $\mathcal{B}$ в правиле вывода Gen (из $\mathcal{B}$ следует $(\forall x_i)\mathcal{B}$) не содержит свободной переменной x_i, и тем самым исключаются возможные ошибки.

Добавление фиктивного атрибута по сути не изменяет содержание отношения: если в АК-объекте $R_k[XZ]$ значение атрибута *Y* неизвестно, то оно также неизвестно и в АК-объекте $+Y(R_k[XZ]) = \begin{bmatrix} A_1 & * & A_3 \\ B_1 & * & B_3 \end{bmatrix}$, так как в нем каждому сочетанию значений атрибутов *X* и *Z* соответствует множество всех значений атрибута *Y*. Поэтому вполне правомерно считать отношение с добавленными фиктивными атрибутами равносильным исходному отношению.

С учетом этого в АК вводятся ***обобщенные операции*** пересечения ($\cap_G$) и объединения ($\cup_G$), которые отличаются от обычных операций $\cap$ и $\cup$ тем, что перед их выполнением АК объекты с разными схемами отношений приводятся к одной схеме за счет добавления в соответствующие АК-объекты недостающих фиктивных атрибутов.

Аналогично определяются ***обобщенные отношения*** $=_G$ и $\subseteq_G$. Смысл их в том, что при проверке равенства или включения АК-объектов в случае, если у них разные схемы отношения, то они приводятся к одной схеме отношения за счет добавления недостающих фиктивных атрибутов.

В АК предложен и обоснован новый метод ***проверки правильности следствия***. Пусть посылки рассуждения выражены АК-объектами $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Тогда логическая формула, интерпретируемая АК-объектом *B*, будет следствием этих посылок, если и только если соблюдается соотношение:

$(A_1 \cap_G A_2 \ldots \cap_G A_n) \subseteq_G B$.

АК-объект, полученный в результате вычисления левой части этого выражения, называется в АК ***минимальным следствием***. Минимальное оно потому, что любое его строгое подмножество не является следствием.

Полученных соотношений АК достаточно для решения Примера 6.

Обозначим множества *P* – множество пациентов, *D* – множество докторов, *Q* – множество знахарей, $P_1 \subseteq P$ – некоторое непустое подмножество пациентов, $L[XY]$ – отношение «*x* любит *y*», заданное как *C*-система. Пусть она нам неизвестна, но для анализа данного рассуждения это не имеет значения.

Тогда первую посылку можно выразить как *C*-кортеж:

$A_1[XY] = [P_1 \;\; D]$ (некоторые (P_1) пациенты любят всех докторов).

Данная посылка интерпретируется как часть (т.е. подмножество) отношения $L[XY]$.

Вторая посылка означает, что из отношения $L[XY]$ надо исключить кортежи, в которых значением атрибута *X* является пациент, а значением атрибута *Y* – некий знахарь. Сделать это можно с помощью следующей операции:

$A_2[XY] = L[XY] \cap [P \;\; \overline{Q}]$ (при пересечении образуется *C*-система, в которой из атрибута *X* исключены все не пациенты, а из атрибута *Y* – все знахари).

Используя Теорему 2, вычисляем минимальное следствие:

$A[XY] = A_1[XY] \cap A_2[XY] = [P_1 \;\; D] \cap (L[XY] \cap [P \;\; \overline{Q}]) = L[XY] \cap [P_1 \;\; D \cap \overline{Q}]$.

Анализируем заключение. Предположим противное, т.е. что некоторые доктора – знахари, т.е. $D \cap Q = Q_D \neq \varnothing$. Тогда множество Q_D должно присутствовать в атрибуте *Y* отношения $L[XY]$. Это предположение можно использовать в качестве третьей посылки

$A_3[XY] = [* \;\; Q_D]$.

Тогда, используя Теорему 2, получим:

$A[XY] \cap [*\ Q_D] = L[XY] \cap L[XY] \cap [P_1 \quad D \cap \overline{Q}\ ] \cap [*\ \ Q_D] = L[XY] \cap [P_1 \ \ D \cap \overline{Q} \cap Q_1]$.

Поскольку $\overline{Q} \cap Q_D = \varnothing$, то $D \cap \overline{Q} \cap Q_D = \varnothing$ и тогда $[P_1 \ \ D \cap \overline{Q} \cap Q_D] = \varnothing$ (Теорема 3) , в силу чего $L[XY] \cap \varnothing = \varnothing$. В алгебре кортежей равенство пересечений посылок рассуждения пустому множеству означает противоречие. Отсюда ясно, что предположение о том, что некоторые доктора знахари, привело к противоречию. Таким образом, подтверждается следствие задачи.

Рассмотрим еще одну операцию с атрибутами.

Операция ***элиминации атрибута*** ($-Atr$) выполняется так: из схемы отношения удаляется соответствующий атрибут Atr, а из матричного представления АК – столбец соответствующий этому атрибуту.

Например, если задана C-система $R[XYZ] = \begin{bmatrix} A_1 & * & A_3 \\ B_1 & B_2 & * \end{bmatrix}$, то $-Y(R[XYZ]) = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & * \end{bmatrix}$.

Логический смысл этой операции, в отличите от операции $+Atr$, зависит от типа АК-объекта. Пусть задан АК-объект $Q[XYZ]$, и ему соответствует логическая формула $Q(x, y, z)$. Тогда:

- если $Q[XYZ]$ – C-кортеж или C-система, $-Y(Q[XYZ])$ равносильно $\exists y(Q(x, y, z))$;
- если $Q[XYZ]$ – D-кортеж или D-система, $-Y(Q[XYZ])$ равносильно $\forall y(Q(x, y, z))$.

Доказательства этих соотношений приведены в [13].

Применение операции элиминации атрибута к C-кортежу или C-системе позволяет вычислить ***проекцию*** АК-объекта. Вычисление проекций позволяет решить задачу, которая до этого не решалась в математической логике, – задачу вычисления следствий с заранее заданными свойствами [8, 11, 14].

Нерешенные проблемы

Важно отметить, что исследования по алгебре кортежей не являются завершенными, так как многие результаты математической логики пока что не представлены в ней. К ним, в частности, относятся следующие.

1. Задача Steamroller (номер 47 в [12]), которая выражается на языке исчисления предикатов, является иллюстрацией сложности логического вывода. Предполагается, что ее формулировка на языке алгебры кортежей позволит упростить ее решение. Однако до настоящего времени такая формулировка не найдена. Также отсутствует обоснование того, что этого нельзя сделать.
2. Не рассмотрена интерпретация и область ее применения для функциональных символов.
3. Не исследована возможность интерпретации исчисления предикатов второго порядка.
4. Не исследована возможность замены универсума Эрбрана [1] более простым вариантом на основе алгебры кортежей.
5. Не исследована возможность интерпретации теоремы Геделя о неполноте [5].

Список можно продолжить.

Позитивные результаты исследований по алгебре кортежей

В то же время имеются позитивные результаты исследований по алгебре кортежей, которые показывают ее преимущества по сравнению с математической логикой. К ним относятся следующие.

1. Помимо логического анализа, алгебру кортежей можно использовать в качестве математической модели во многих областях дискретной математики и информационных технологий [8, 11, 13].
2. С помощью средств математической логики трудно, а иногда просто невозможно применять многие необходимые в естественных рассуждениях методы логического анализа, такие как формулирование и проверка гипотез, анализ неопределенностей, распознавание и анализ ошибок и некорректностей в рассуждениях, вывод абдуктивных заключений, анализ пресуппозиций, вывод следствий с заранее заданными свойствами и т.д. В то же время эти задачи решаются с помощью алгебры кортежей [8, 11, 14, 15].

Заключение

Для многостороннего логического анализа рассуждений и обоснований предложено вместо математической логики, основанной на аксиоматическом подходе, использовать алгебру кортежей, основанную на алгебре множеств. Перечисленные позитивные результаты использования алгебры кортежей в качестве математической модели для многих методов логического анализа, возможность решения с ее помощью тех задач, которые не решаются в исчислении предикатов, а также ее принадлежность к алгебре множеств показывает перспективность ее выбора в качестве математической основы для логического анализа. Расширенные аналитические возможности предлагаемого подхода, его прикладная направленность подтверждают целесообразность его использования в образовании. Нерешенные проблемы лишь показывает, что данная система находится в стадии развития.

Список литературы

1. *Чень Ч., Ли Р.* Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. М.: Наука. 1983. 360 с.
2. *Copi, I. M., Cohen, C., McMahon, K.* Introduction to Logic. New York: Routledge, 2016. 654 p. . ISBN: 978-1-292-02482-0
3. *Бочаров, В. А., Маркин В.И.* Введение в логику: учебник. М. : ИНФРА-М, 2008. 560 с. ISBN 978-5-16-003360-0
4. *Ивлев Ю.В.* Логика: учебник. 4-е изд., перераб. и доп. Москва: Проспект, 2022. 304 с. ISBN 978-5-392-34856-5
5. *Mendelson, E.* Introduction to Mathematical Logic. Boca Raton, London, New York: Taylor & Francis Group, 2015 (6th ed.). 499 pp. ISBN:978-1-4822-3778-8
6. *Гетманова А.Д.* Учебник логики. Со сборником задач. М.: КНОРУС, 2011. 368 с. ISBN: 978-5-406-01197-3
7. *Бурбаки Н.* Теория множеств. М.: Мир, 1965. 455 с.
8. *Кулик Б.А.* Логика и математика: просто о сложных методах логического анализа. СПб.: Политехника, 2020. 141 с. ISBN 978-5-7325-1166-6, doi: 10.25960/7325-1166-6
9. *Поспелов Д. А.* Моделирование рассуждений. Опыт анализа мыслительных актов. М.: Радио и связь, 1989. 184 с. ISBN 5-256-00183-3
10. *Дейт, К. Дж.* Введение в системы баз данных, 8-е издание.: Пер. с англ. М.: Издательский дом "Вильяме", 2005. 1328 с. ISBN 5-8459-0788-8
11. *Kulik B., Fridman A.* Complicated Methods of Logical Analysis Based on Simple Mathematics. Newcastle upon Tyne: Cambridge Scholars Publishing. 2022. 195 p. ISBN: 978-1-5275-8014-5
12. *Pelletier, F.* Seventy-Five Problems for Testing Automatic Theorem Provers // Journal of Automated Reasoning. 1984. vol. 2. Pp. 191–216.
13. *Кулик Б.А., Зуенко А.А., Фридман А.Я.* Алгебраический подход к интеллектуальной обработке данных и знаний. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. 235 с. ISBN 978-5-7422-2836-3
14. *Кулик Б.А.* Вывод следствий с предварительно заданными свойствами // Системный анализ в проектировании и управлении. Материалы XXV Международной научной и учебно-практической конференции, 13-14 октября 2021 г. – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2021. Часть 2. С. 89-97. doi:10.18720/SPBPU/2/id21-157. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=47735980
15. *Кулик Б.А.* Исследование противоречий в естественных рассуждениях на примерах метафор и пресуппозиций // Труды Семнадцатой Национальной конференции по искусственному интеллекту с международным участием. КИИ-2019 (21–25 октября 2019 г., г. Ульяновск, Россия). Ульяновск: УлГТУ, 2019. Т. 2. С. 192-200.