Б.А. Кулик

Как вычислять интересные следствия*

Борис Александрович Кулик
Институт проблем машиноведения РАН.
Россия, 199178, Санкт-Петербург, пр. Большой В.О., 61.
E-mail: `ba-kulik@yandex.ru`

Аннотация: В современном определении логического вывода предусматривается получение следствий из аксиом или посылок с помощью правил вывода. На практике в дедуктивном анализе часто используются такие методы, как метод резолюций, аналитических или семантических таблиц и т.д. Однако подобные методы не пригодны для решения задачи вывода следствий с заданными свойствами (иногда их называют *интересными следствиями*), так как они предполагают следствие уже известным. В то же время в литературе по логике нет четкого ответа на следующие вопросы: какие свойства присущи интересному следствию и как вычислить интересное следствие?

Ответы на эти вопросы можно получить, если для моделирования рассуждений воспользоваться математическим аппаратом *алгебры кортежей*, в основу которой заложены свойства декартова произведения множеств. Объектами алгебры кортежей являются произвольные многоместные отношения. Эти отношения можно рассматривать как интерпретации формул математической логики. Они представляют собой матрицеподобные структуры, у которых ячейки содержат не элементы, а подмножества соответствующих атрибутов. Операции (дополнение, *обобщенное пересечение* и *обобщенное объединение*) и отношение (*обобщенное включение*) в алгебре кортежей соответствуют логическим связкам математической логики (отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация). Вычисление кванторных операций выполняется с помощью операций с атрибутами (*добавление фиктивного атрибута*, что соответствует правилу обобщения в исчислении предикатов, и *элиминация атрибута*). Для двух из четырех типов структур алгебры кортежей элиминация атрибутов соответствует вычислению *проекции отношения*. Для вывода интересных следствий в алгебре кортежей используется структура, названная *минимальным следствием*, которая равна обобщенному пересечению посылок, выраженных структурами алгебры кортежей. Интересные следствия вычисляются как проекции минимального следствия. В результате вычислений и проверок получаются следствия с сокращенным или заданным составом переменных, а также с сокращенным объемом записи.

Ключевые слова: интерпретация, алгебра кортежей, декартово произведение множеств, кванторные операции, правило обобщения, минимальное следствие, проекция, элиминация атрибутов

---

* Работа частично поддержана РФФИ (проект № 19-08-00079)

Введение

Постановка задачи поиска интересных следствий предложена в статье [Шалак, 2018]. В математической логике пока что не только не решена задача поиска новых следствий с заранее заданными свойствами, но даже нет ясности в том, какими свойствами должны характеризоваться такие следствия. В какой-то степени близкой к этой задаче является широко известная задача минимизации булевых функций [Quine, 1952]. Но в ней речь идет об эквивалентных преобразованиях логических формул определенного типа, а не о выводе следствий. Чтобы найти подходы к решению задачи вычисления интересных следствий, предлагается воспользоваться методами алгебры кортежей [Кулик и др., 2010; Kulik, Fridman, 2018; Кулик, 2020].

1. Краткие сведения об алгебре кортежей

1.1. Основные термины и структуры алгебры кортежей

С помощью алгебры кортежей (АК) исследуется один из вариантов *интерпретации* языка логики первого порядка. Этот вариант рассмотрен в [Mendelson, 2015, p. 54]. В качестве области интерпретации (*domain*) всех переменных используется множество D, а для n-местных предикатов и формул со свободными переменными областью интерпретации является n-местное отношение, т.е. подмножество n-кортежей элементов из D^n. С учетом прикладной направленности АК в данную модель интерпретации были внесены следующие изменения.

Изменение 1. Для разных переменных модели разрешено использовать разные области интерпретации. Поэтому, во избежание возможных несогласованностей, было предложено по аналогии с базами данных [Плоткин, 1991] приписывать к именам отношений ***схему отношения***, т. е. последовательность имен областей интерпретации переменных. С учетом этого, имена областей интерпретации переменных были названы ***атрибутами***, а области интерпретации атрибутов — ***доменами***.

Изменение 2. Для ряда задач логического анализа (некоторые из них приведены в данной статье) более удобно рассматривать n-местное отношение не как множество n-кортежей элементов, а как объединение декартовых произведений. В этом случае в качестве значений атрибута используются не элементы его домена, а имена или обозначения (например, A_2 или $\{b, c\}$) всех подмножеств домена. Множества с этими именами или обозначениями названы ***компонентами*** атрибута.

Объединение декартовых произведений (ДП), рассматриваемое как отдельная структура, ранее не исследовалось. Для этой структуры не были известны алгоритмы операций (дополнение, пересечение, объединение), алгоритмы проверок включения одной структуры в другую и т. д. Были определены только отдельные операции для ДП (пересечение и разность), а также алгоритм проверки включения одного ДП в другое. Оказалось, что все эти алгоритмы и их обоснования можно существенно упростить, если отказаться от общепринятых обозначений ДП (D^n; $D_1 \times D_2 \times D_3$; $\prod_{i=1}^{n} D_i$ и т. д.). Вместо этого было предложено представлять ДП как кортежи компонент, при этом каждая компонента с помощью схемы отношения привязывается к определенному атрибуту. Определяемый ниже C-кортеж как раз и является подобной записью ДП. Тогда более сложные структуры записываются в виде матриц.

Законы АК соответствует законам *алгебры множеств* [Courant, Robbins, 1996]. Многоместные отношения в АК можно представить с помощью четырех типов структур (***АК-объектов***). Вместо логических связок $\neg, \wedge, \vee$ и $\supset$ в АК используются соответствующие операции (по сути это модифицированные операции алгебры множеств) с многоместными отношениями, а вместо кванторов — ***операции с атрибутами***. Алгоритмы выполнения операций с АК-объектами, проверок включения, преобразований в другие типы и т.д. сформулированы и доказаны в АК в виде теорем. Формулировки теорем из [Кулик и др., 2010] и [Кулик, 2020], номера которых упоминаются в тексте данной статьи, приведены в разделе 1.2.

Информация о схеме отношения АК-объектов содержится в их именах: к идентификатору отношения приписывается заключенная в квадратные скобки схема этого отношения. Например, имя $R[XYZ]$ означает, что АК-объект R содержится в пространстве $X \times Y \times Z$. АК-объекты, заданные в одном и том же пространстве атрибутов, называются ***однотипными***.

Выделяются два типа компонент, названных ***фиктивными компонентами***.

Полная компонента (обозначается $*$) равна домену соответствующего атрибута.

Пустая компонента (обозначается $\varnothing$) равна пустому множеству.

Рассмотрим типы структур АК — C-кортежи, C-системы, D-кортежи и D-системы. Эти обозначения ассоциируются со словами *conjunction* и *disjunction*, так как C-кортеж соответствует конъюнкции, а D-кортеж — дизъюнкции логических формул. Структуры АК матричные, причем в ячейках матриц записываются не элементы, а компоненты. При преобразовании АК-объектов в формулы математической логики предполагается, что компоненты АК-объектов — это интерпретации одноместных предикатов, а сами АК-объекты — интерпретации формул или многоместных предикатов.

***C*-кортеж** — это n-местное отношение, равное ДП содержащихся в нем компонент, записанных в виде кортежа, ограниченного квадратными скобками.

Например, АК-объект $T[XYZ] = [A * B]$ — это C-кортеж, при этом $A \subseteq X$, $B \subseteq Z$, а компонента «$*$» равна домену соответствующего атрибута (в данном случае, поскольку она находится на второй позиции, то $* = Y$). Этот C-кортеж можно преобразовать в обычное отношение с помощью ДП следующим образом: $T[XYZ] = A \times Y \times B$. Он соответствует конъюнкту

$T(x, z) = A(x) \wedge True \wedge B(z) = A(x) \wedge B(z)$,

в котором интерпретациями одноместных предикатов $A(x)$ и $B(z)$ являются компоненты A и B.

Доказано, что пересечение C-кортежей, если оно не равно пустому множеству, можно выразить как C-кортеж (Теоремы 2 и 3 в [Кулик, 2020]). Однако объединение C-кортежей может быть представлено единственным C-кортежем лишь в исключительных случаях (эти случаи определены в [Кулик, 2020]). Поэтому возникает необходимость в определении структуры нового типа.

***C*-система** — это отношение, равное объединению однотипных C-кортежей, которые записываются в виде строк матрицы, ограниченной квадратными скобками.

Например, $R[XYZ] = \begin{bmatrix} A_1 & * & A_3 \\ B_1 & B_2 & * \end{bmatrix}$ есть C-система, при этом $A_1 \subseteq X$, $A_3 \subseteq Z$ и т. д. Данная C-система преобразуется в обычное отношение с помощью ДП следующим образом:

$R[XYZ] = (A_1 \times Y \times A_3) \cup (B_1 \times B_2 \times Z)$.

C-системе в математической логике соответствует дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ).

Если АК-объект преобразуется в обычное отношение, то элементы этого отношения называются ***элементарными кортежами***. Они представляют выполняющие подстановки соответствующей логической формулы. С помощью C-кортежей и C-систем можно выразить любое многоместное отношение, но для вычисления их дополнений требуются новые структуры — D-кортежи и D-системы. Для определения этих АК-объектов используется промежуточная структура — диагональная C-система.

Диагональная C-система — это C-система размерности $n \times n$, у которой все недиагональные компоненты — полные ($*$).

Например, $Q[XYZ] = \begin{bmatrix} A & * & * \\ * & B & * \\ * & * & C \end{bmatrix}$ — диагональная C-система. Доказано (Теорема 9 из [Кулик, 2020]), что диагональная C-система есть результат вычисления дополнения некоторого C-кортежа.

D-кортеж — это отношение, равное диагональной C-системе, записанное как ограниченный перевернутыми квадратными скобками кортеж ее диагональных компонент.

Например, изображенную выше диагональную C-систему можно записать как D-кортеж: $Q[XYZ] = \left]A \quad B \quad C\right[$. Ясно, что дополнение $Q[XYZ]$ равно C-кортежу $[\overline{A} \quad \overline{B} \quad \overline{C}]$.

D-система — это отношение, равное пересечению однотипных D-кортежей, записанное как ограниченная перевернутыми квадратными скобками матрица компонент, в которой строками являются участвующие в операции D-кортежи.

С помощью D-систем легко вычислять дополнение C-систем. Поскольку C-система есть объединение C-кортежей, то по закону де Моргана ее дополнение равно пересечению дополнений этих C-кортежей. Поскольку дополнения C-кортежей равны соответствующим D-кортежам, то ясно, что для вычисления дополнения C-системы достаточно заменить в ней все компоненты их дополнениями, а вместо обычных квадратных скобок записать перевернутые.

Например, дополнение C-системы $P[XYZ] = \begin{bmatrix} A & * & C \\ D & E & * \end{bmatrix}$ вычисляется как D-система $\overline{P}[XYZ] = \left]\begin{matrix} \overline{A} & \varnothing & \overline{C} \\ \overline{D} & \overline{E} & \varnothing \end{matrix}\right[$. В математической логике D-системе соответствует конъюнктивная нормальная форма (КНФ).

Универсум АК-объекта (U) определяется как ДП доменов атрибутов, заданных в его схеме отношения.

Например, для АК-объекта $R[XYZ]$ универсум есть $U = X \times Y \times Z$. Если при вычислении установлено, что некоторая C-система равна универсуму, то она соответствует ***общезначимой формуле***, если же некоторая D-система окажется равной пустому множеству, то она соответствует ***тождественно ложной формуле*** или ***противоречию***.

Кванторные операции в АК выполняются с помощью простых операций с атрибутами. К ним, в частности, относятся операции $+Atr$ и $-Atr$. Рассмотрим эти операции.

Операция ***добавление фиктивного атрибута*** ($+Atr$) выполняется как добавление имени нового атрибута в схему отношения АК-объекта и соответствующего нового столбца с фиктивными компонентами в матричное представление.

Например, пусть $R_k[XZ] = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{bmatrix}$. Тогда после добавления фиктивного атрибута Y в $R_k[XZ]$ получим АК-объект

$+Y(R_k[XZ]) = R_m[XYZ] = \begin{bmatrix} A_1 & * & A_3 \\ B_1 & * & B_3 \end{bmatrix}$.

При выполнении операции $+Atr$ в C-структуры добавляются фиктивные компоненты «$*$», а в D-структуры — фиктивные компоненты «$\varnothing$».

Операция $+Atr$ соответствует ***правилу обобщения*** (Gen) в исчислении предикатов, которое в [Mendelson, 2015, p. 67] формулируется так: «$(\forall x_i)\mathcal{B}$ следует из $\mathcal{B}$» ($(\forall x_i)\mathcal{B}$ follows from $\mathcal{B}$). Далее мы более подробно рассмотрим соотношение между правилом Gen в этой формулировке и операцией $+Atr$.

Операция $+Atr$ используется также для приведения АК-объектов с разными схемами отношений к одной схеме отношения за счет добавления недостающих фиктивных атрибутов.

Обобщенные операции пересечения ($\cap_G$) и объединения ($\cup_G$) — это операции АК, отличающиеся от обычных одноименных операций алгебры множеств тем, что перед их выполнением, если это необходимо, АК-объекты приводятся к одной схеме отношения с помощью операции $+Atr$.

Обобщенные операции $\cap_G$ и $\cup_G$ семантически равносильны логическим связкам конъюнкции и дизъюнкции. Аналогично вводятся ***обобщенные отношения*** ($\subseteq_G$ и $=_G$). Доказано, что ***АК с обобщенными операциями и отношениями изоморфна алгебре множеств***.

Операция ***элиминации атрибута*** ($-Atr$) выполняется как удаление из схемы отношения имени этого атрибута, а из матричного представления — столбца его значений.

Логический смысл этой операции, в отличие от $+Atr$, уже зависит от типа АК-объекта (Теоремы 2.23 и 2.24 в [Кулик и др., 2010]).

Рассмотрим операцию $-Atr$ на примере. Пусть задана D-система $P[XYZ] = \left]\begin{matrix} \{c\} & \{g\} & \{a,c\} \\ \{a,d\} & \varnothing & \{b\} \end{matrix}\right[$.

Вычислим $-X(P[XYZ]) = Q[YZ] = \left]\begin{matrix} \{g\} & \{a,c\} \\ \varnothing & \{b\} \end{matrix}\right[$.

Преобразуем полученный результат в C-систему (Теорема 2.20 в [Кулик и др., 2010]): $Q[YZ] = \begin{bmatrix} \{g\} & * \\ * & \{a,c\} \end{bmatrix} \cap [* \quad \{b\}] = [\{g\} \quad \{b\}]$.

В D-системах в соответствии с семантикой операции $-Atr$, которая здесь выполняет роль квантора $\forall$, должно выполняться соотношение $[* \quad \{g\} \quad \{b\}] \subseteq P[XYZ]$. Проверка с помощью Теорем 2.16 и 2.17 в [Кулик и др., 2010] показывает, что данное соотношение выполняется.

Проекцией АК-объекта называется результат однократного или многократного применения операции $-Atr$ к АК-объекту, выраженному как

C-кортеж или C-система, при условии, что атрибут Atr содержится в его схеме отношения.

Если, допустим, задана C-система $R[XYZ]$, то ее проекции обозначаются $Pr_{XY}(R)$, $Pr_Y(R)$, $Pr_{XZ}(R)$ и т. д. В частности, проекция $Pr_{XZ}(R)$ вычисляется с помощью элиминации атрибута Y: $Pr_{XZ}(R) = -Y(R[XYZ])$.

С проекциями АК-объектов тесно связано понятие фиктивного атрибута, содержащегося в отношении. Пусть задан АК-объект $R[\mathbf{W}]$, где $\mathbf{W}$ — множество атрибутов, в состав которых входит атрибут X, и $Pr_{\mathbf{W}\setminus X}(R)$ — проекция АК объекта $R[\mathbf{W}]$, в которой присутствуют все атрибуты, кроме X. Тогда X есть фиктивный атрибут в $R[\mathbf{W}]$, если соблюдается следующее равенство

$$R[\mathbf{W}] = +X(Pr_{\mathbf{W}\setminus X}(R)). \tag{1}$$

Равенство (1) означает, что в АК-объекте $R[\mathbf{W}]$ каждому элементарному кортежу из проекции $Pr_{\mathbf{W}\setminus X}(R)$ соответствует множество всех значений атрибута X.

В АК предложен и обоснован новый метод проверки правильности следствия. Пусть посылки рассуждения записаны в виде АК-объектов $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Тогда логическая формула, представленная АК-объектом B, будет следствием этих посылок, если и только если соблюдается соотношение:

$$(A_1 \cap_G A_2 \cap_G \cdots \cap_G A_n) \subseteq_G B. \tag{2}$$

АК-объект, полученный в результате вычисления выражения в левой части (2) называется в АК ***минимальным следствием***. Минимальное оно потому, что любое его строгое подмножество не является следствием. Как показано ниже, с его помощью можно получить следствия с заранее заданными свойствами.

Рассмотрим, в чем заключается разница между операцией $+Atr$ и правилом вывода Gen. Дело в том, что в АК фиктивный атрибут X_i добавляется в АК-объект при условии, что X_i отсутствует в его схеме отношения. Это означает, что правило Gen «$(\forall x_i)\mathcal{B}$ следует из $\mathcal{B}$» надо дополнить предложением «при условии, что переменная x_i не входит свободно в $\mathcal{B}$». В книге [Mendelson, 2015] для правила Gen это условие отсутствует. Но если $\mathcal{B}$ не тавтология (более точно, не тот случай, когда переменная x_i соответствует фиктивному атрибуту X_i в АК-объекте, который является интерпретацией формулы $\mathcal{B}$), то навешивание квантора $\forall x_i$ на формулу $\mathcal{B}$, содержащую свободную переменную x_i, приводит к сокращению или полному вырождению содержащихся в $\mathcal{B}$ выполняющих подстановок, что делает абсурдным вывод $(\forall x_i)\mathcal{B}$ из $\mathcal{B}$.

Еще одним источником ошибок в логическом анализе на основе исчисления предикатов может быть отсутствие понятия, аналогичного термину «схема отношения». В частности, в алгоритме унификации допускается замена переменных в подстановках [Chang, Lee, 1973, p. 75]. Для отношений и АК-объектов, которые являются интерпретациями предикатов и формул, это означает замену атрибута в схеме отношения и, соответственно, переход в другое пространство даже в том случае, если домены этих атрибутов одинаковы. Например, АК-объект $P[XY]$ при пересечении с самим собой не изменяется, но если в нем заменить имена атрибутов, например, $P[YZ]$, то обобщенное пересечение $P[XY] \cup_G P[YZ]$ означает *операцию соединения* отношений. Другой пример: интерпретацией формулы $A(x) \wedge B(x)$ является пересечение интерпретаций одноместных предикатов $A(x)$ и $B(x)$, в то время как интерпретацией формулы $A(x) \wedge B(y)$ оказывается декартово произведение интерпретаций предикатов $A(x)$ и $B(y)$. Таким образом, интерпретации формул при переименовании переменных существенно изменяются, что в некоторых случаях не принимается во внимание при замене переменных в алгоритме унификации.

1.2. Сводка теорем алгебры кортежей

Номера теорем соответствуют номерам в двух публикациях по АК. Доказанные теоремы с номерами 1—3, 8, 9 цитируются по публикации [Кулик, 2020], остальные — по [Кулик и др., 2010]. В формулировках теорем речь идет об однотипных АК-объектах, поэтому их схемы отношений в именах не указываются.

Теорема 1 (проверка включения C-кортежей). Пусть даны два однотипных C-кортежа $P = [P_1\ P_2\ \cdots\ P_N]$ и $Q = [Q_1\ Q_2\ \cdots\ Q_N]$. Тогда $P \subseteq Q$, если и только если $P_i \subseteq Q_i$ верно для всех соответствующих пар компонент сравниваемых C-кортежей.

Теорема 2 (пересечение C-кортежей). Пусть даны два однотипных C-кортежа $P = [P_1\ P_2\ \cdots\ P_N]$ и $Q = [Q_1\ Q_2\ \cdots\ Q_N]$. Тогда
$P \cap Q = [P_1 \cap Q_1\ \ P_2 \cap Q_2\ \cdots\ P_N \cap Q_N]$.

Теорема 3 (пустое пересечение C-кортежей). Пусть даны два однотипных C-кортежа $P = [P_1\ P_2\ \cdots\ P_N]$ и $Q = [Q_1\ Q_2\ \cdots\ Q_N]$, и в них имеется, по крайней мере, одна пара P_i и Q_i компонент, для которых $P_i \cap Q_i = \varnothing$. Тогда $P \cap Q = \varnothing$.

Теорема 8 (пересечение C-систем). Пусть даны однотипные C-системы P и Q. Результатом их пересечения будет C-система, содержащая все непустые пересечения каждого C-кортежа из P с каждым C-кортежем из Q.

Теорема 9 Дополнение C-кортежа $P = [P_1\ P_2\ \cdots\ P_N]$ есть диагональная C-система $R = \begin{bmatrix} \overline{P_1} & * & \cdots & * \\ * & \overline{P_2} & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & * & \cdots & \overline{P_N} \end{bmatrix}$ размерности $n \times n$, где каждая диагональная компонента — дополнение соответствующей компоненты C-кортежа P.

Теорема 2.16 (проверка включения C-кортежа в D-кортеж). Для C-кортежа $P = [P_1\ P_2\ \cdots\ P_N]$ и D-кортежа и $Q =]Q_1\ Q_2\ \cdots\ Q_N[$ справедливо $P \subseteq Q$, если и только если по крайней мере для одного i соблюдается $P_i \subseteq Q_i$.

Теорема 2.17 (проверка включения C-кортежа в D-систему). Для C-кортежа P и D-системы Q справедливо $P \subseteq Q$, если и только если для каждого D-кортежа Q_i из Q выполняется $P \subseteq Q_i$.

Теорема 2.20 (преобразование D-системы в C-систему). D-система P, содержащая m D-кортежей, эквивалентна C-системе, которая является пересечением m C-систем, полученных с помощью преобразования каждого D-кортежа из P в диагональную C-систему.

Теорема 2.23 (навешивание квантора $\exists$). Если C-кортеж или C-система $R[\cdots\ X\ \cdots]$, не содержащие пустых C-кортежей, — интерпретация логической формулы $A(\cdots,\ x,\ \cdots)$ со свободной переменной x, то АК-объект $-X(R[\cdots\ X\ \cdots])$ — интерпретация логической формулы $\exists x(A(\cdots,\ x,\ \cdots))$.

Теорема 2.24 (навешивание квантора $\forall$). Если D-кортеж или D-система $R[\cdots\ X\ \cdots]$, не содержащие D-кортежей с компонентой «$*$», — интерпретация логической формулы $A(\cdots,\ x,\ \cdots)$ со свободной переменной x, то АК-объект $-X(R[\cdots\ X\ \cdots])$ — интерпретация логической формулы $\forall x(A(\cdots,\ x,\ \cdots))$.

Теорема 3.1 D-кортеж вида $Q =]Q_1\ Q_2\ \cdots\ Q_{m-1}\ Q_m[$ преобразуется в эквивалентную ему ортогональную C-систему:

$$\begin{bmatrix} Q_1 & * & \cdots & * & * \\ \overline{Q_1} & Q_2 & \cdots & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{Q_1} & \overline{Q_2} & \cdots & Q_{m-1} & * \\ \overline{Q_1} & \overline{Q_2} & \cdots & \overline{Q_{m-1}} & Q_m \end{bmatrix}.$$

2. Примеры решения логических задач методами АК

Здесь приведены примеры, которые иллюстрируют некоторые возможности АК. Предварительно рассмотрим метод ортогонализации, который применяется при решении логических задач, в том числе для задачи вычисления интересных следствий.

С помощью ортогонализации вычисляются C-системы с попарно непересекающимися C-кортежами, которые используются при расчете вероятностей событий, выраженных логическими формулами или АК-объектами [Кулик и др., 2010; Kulik, Fridman, 2018]. Также было установлено, что ортогонализация позволяет значительно уменьшить трудоемкость некоторых алгоритмов экспоненциальной вычислительной сложности за счет того, что при выполнении операций получается намного больше пустых C-кортежей, которые не участвуют в последующих вычислениях. Одним из таких алгоритмов является *алгоритм преобразования D-системы в C-систему*, с помощью которого находится решение NP-полной «задачи века» *выполнимость КНФ* [Кулик, 1995].

Формулируется этот алгоритм весьма просто (Теорема 2.20). Однако его реализация требует в общем случае экспоненциального числа операций. При грубом подсчете, если D-система задана в пространстве из N атрибутов, и число D-кортежей в ней равно M, то для выполнения этой операции потребуется N^M операций пересечения C-кортежей. На самом же деле этих операций намного меньше, так как, во-первых, многие D-кортежи содержат меньшее, чем N, число непустых компонент и преобразуются в C-систему меньшей размерности, и, во-вторых, при пересечениях C-кортежей нередко получаются пустые кортежи, которые не участвуют в дальнейших операциях.

Если в алгоритме преобразования D-системы в C-систему использовать Теорему 3.1, то число операций этого алгоритма может значительно сократиться и в некоторых случаях дойти до полиномиальной оценки вычислительной сложности [Кулик, 1995]. Для того, чтобы выполнить ортогонализацию в этом алгоритме, достаточно каждый D-кортеж исходной D-системы преобразовать в ортогональную C-систему.

Еще более интенсивное сокращение трудоемкости алгоритма преобразования D-системы в C-систему достигается за счет использования специальных правил упорядочивания D-кортежей, а также использования различных вариантов преобразования D-кортежей в ортогоналные C-системы [Кулик, 1995; Kulik, Fridman, 2018].

Задача 1. Четыре подруги (Анна, Беата, Светлана и Дина) имеют следующие особенности: Анна и Беата — блондинки, Светлана предпочитает короткую стрижку, Анна и Дина носят туфли на высоких каблуках, Анна, Беата и Светлана работают в фирме D. В зависимости от внешности и статуса, подруги предпочитают покупать одежду в разных торговых фирмах (назовем их K, L и M). Эти зависимости выражаются следующими условиями:

1) Если не блондинки отдают предпочтение фирме K, то девушка с короткой стрижкой предпочитает фирму M;

2) Если девушки с длинными волосами предпочитают фирму K, то девушка, не работающая в фирме D, покупает одежду в фирме L, а блондинки — в фирме M;

3) Если девушки, носящие туфли на высоких каблуках, отдают предпочтение фирме L, то не блондинки покупают одежду в фирме K;

4) Если девушки, не носящие туфель на высоких каблуках, покупают одежду в фирме K, то, девушки на туфлях с высокими каблуками предпочитают магазины фирмы M.

Необходимо проверить выполнимость этих условий.

Формализуем условия задачи. Имена девушек запишем в виде множества $\{a, b, c, d\}$. Тогда множество блондинок будет $A = \{a, b\}$, множество девушек с короткой стрижкой — $B = \{c\}$, множество девушек, носящих высокие каблуки — $C = \{a, d\}$, и множество девушек, работающих в фирме D, — $D = \{a, b, c\}$.

Пусть предикат $Y(z)$ обозначает девушек с признаком Y, отдающих предпочтение фирме Z. Тогда условия задачи можно записать в виде следующей логической формулы:

$$P(k,l,m) = (\neg A(k) \supset B(m)) \wedge (\neg B(k) \supset \neg D(l)) \wedge (\neg B(k) \supset A(m)) \wedge$$
$$\wedge (C(l)) \supset \neg A(k) \wedge (\neg C(k) \supset C(m)).$$

Отметим одну особенность этой задачи. При распознавании выполнимости в формулах исчисления предикатов обязательным завершающим этапом их решения является алгоритм унификации, в результате которого исходная задача преобразуется в задачу исчисления высказываний, которая решается различными методами, в частности, методом резолюций [Chang, Lee, 1973]. Предложенная задача выходит за рамки задач исчисления высказываний, тем не менее, ее можно решить без преобразования в формулу исчисления высказываний. Для этого воспользуемся алгоритмом преобразования D-системы в C-систему (Теорема 2.20), а для уменьшения трудоемкости алгоритма — методом ортогонализации (см. выше).

Сначала преобразуем исходную формулу в КНФ:

$$P(k,l,m) = (A(k) \vee B(m)) \wedge (B(k) \vee \neg D(l)) \wedge (B(k) \vee A(m)) \wedge$$
$$\wedge (\neg A(k) \vee \neg C(l)) \wedge (C(k) \vee C(m)).$$

Для преобразования формулы $P(k,l,m)$ в D-систему выберем универсум $K \times L \times M = \{a, b, c, d\}^3$, а интерпретации предикатов $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ будем использовать в качестве компонент A, B, C, D в соответствующих атрибутах. Например, дизъюнкт $(B(k) \vee \neg D(l))$ записывается как D-кортеж $P_2[KL] =]B \ \ \overline{D}[$. Если применить операцию $+Atr$, то в схеме отношения $[KLM]$ он выражается как $P_2[KLM] =]B \ \ \overline{D} \ \ \varnothing[$.

После преобразования всех дизъюнктов в D-кортежи получим:

$$P[KLM] = \left]\begin{matrix} A & \varnothing & B \\ B & \overline{D} & \varnothing \\ B & \varnothing & A \\ \overline{A} & \overline{C} & \varnothing \\ C & \varnothing & C \end{matrix}\right[= \left]\begin{matrix} \{a,b\} & \varnothing & \{c\} \\ \{c\} & \{d\} & \varnothing \\ \{c\} & \varnothing & \{a,b\} \\ \{c,d\} & \{b,c\} & \varnothing \\ \{a,d\} & \varnothing & \{a,d\} \end{matrix}\right[.$$

Обозначим D-кортежи с номером i в D-системе $P[KLM]$ как P_i. Приступим к вычислениям, используя Теоремы 2, 3, 8, 2.20 и 3.1.

$$P_1 \cap P_2 = \begin{bmatrix} \{a,b\} & * & * \\ \{c,d\} & * & \{c\} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} \{c\} & * & * \\ \{a,b,d\} & \{d\} & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{a,b\} & \{d\} & * \\ \{c\} & * & \{c\} \\ \{d\} & \{d\} & \{c\} \end{bmatrix}.$$

$$P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \begin{bmatrix} \{a,b\} & \{d\} & * \\ \{c\} & * & \{c\} \\ \{d\} & \{d\} & \{c\} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} \{c\} & * & * \\ \{a,b,d\} & * & \{a,b\} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \{a,b\} & \{d\} & \{a,b\} \\ \{c\} & * & \{c\} \end{bmatrix}.$$

$$P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4 = \begin{bmatrix} \{a,b\} & \{d\} & \{a,b\} \\ \{c\} & * & \{c\} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} \{c,d\} & * & * \\ \{a,b\} & \{b,c\} & * \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \{c\} & * & \{c\} \end{bmatrix}.$$

$$P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4 \cap P_5 = \begin{bmatrix} \{c\} & * & \{c\} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} \{a,d\} & * & * \\ \{b,c\} & * & \{a,d\} \end{bmatrix} = \varnothing\ .$$

Отсюда следует, что условия задачи невыполнимы.

Задача 2. Некоторые пациенты любят всех докторов. Ни один пациент не любит знахарей. Следовательно, никакой доктор не является знахарем.

В [Chang, Lee, 1973] эта задача решается двумя способами: сначала с помощью интерпретации (пример 3.15), затем методом резолюций с использованием алгоритма унификации (пример 5.21). Здесь показывается, как эту задачу можно решить с помощью АК.

Пусть заданы множества P — пациенты, D — доктора, Q — знахари, $P_1 \subseteq P$ — некоторые пациенты, $L[XY]$ – отношение «x любит y», заданное как C-система. Пусть она нам неизвестна, но в данном случае это неважно.

Тогда первая посылка: $A_1[XY] = [P_1 \ \ D]$.

Вторая посылка: $A_2[XY] = L[XY] \cap [P \ \ \overline{Q}]$ (при пересечении образуется C-система, в которой из атрибута X исключены все не пациенты, а из атрибута Y — все знахари.

Вычисляем минимальное следствие:

$A[XY] = [P_1 \ \ D] \cap L[XY] \cap [P \ \ \overline{Q}] = L[XY] \cap [P_1 \ \ D \cap \overline{Q}]$

Анализируем заключение. Предположим противное, т. е. что некоторые доктора — знахари. Это означает, что $D \cap Q = Q_1 \neq \varnothing$. Множество Q_1 может присутствовать в атрибуте Y отношения $L[XY]$, поэтому в качестве отрицания заключения мы выбираем C-кортеж $[* \quad Q_1]$ и вычисляем его пересечение с минимальным следствием:

$A[XY] \cap [* \quad Q_1] = L[XY] \cap [P_1 \quad D \cap \overline{Q} \cap Q_1] = \varnothing$, так как $\overline{Q} \cap Q_1 = \varnothing$ и, следовательно, $[P_1 \quad D \cap \overline{Q} \cap Q_1] = \varnothing$ (Теорема 3) и $L[XY] \cap \varnothing = \varnothing$. Отсюда ясно, что заключение корректно.

Нерешенная проблема. Задача Steamroller (№ 47 в [Pelletier, 1986]), которая выражается на языке исчисления предикатов, является иллюстрацией сложности логического вывода. Предполагается, что ее формулировка на языке АК позволит упростить ее решение. Однако до настоящего времени такая формулировка не найдена. Также отсутствует обоснование того, что этого нельзя сделать.

3. Свойства интересных следствий

Рассмотрим сначала одно очевидное следствие из соотношения (2). Пусть среди посылок в (2) имеется посылка A_i. Тогда справедливо соотношение

$(A_1 \cap_G A_2 \cap_G \cdots \cap_G A_n) \subseteq_G A_i$.

Ясно, что такие следствия легко выводимы, но интереса не представляют.

Рассмотрим другие случаи. Многочисленные примеры задач логического вывода [Chang, Lee, 1973; Mendelson, 2015; Pelletier, 1986] характеризуются тем, что весьма часто проверяемые следствия содержат сравнительно небольшой, по сравнению с исходными данными, состав переменных. Так, в примере из [Chang, Lee, 1973] требуется доказать , что из посылок $\neg P \vee \neg Q \vee R$, $P \vee R$ и $Q \vee R$ можно вывести следствие R. В традиционной силлогистике посылки содержат три разных термина, в то время как в заключении — два.

В задаче Steamroller, о которой говорится в разделе 2, при формализации получается всего три логических переменных, но в ней сокращение осуществляется для предикатов, используемых в этой задаче. К этим предикатам относятся «волки», «лисы», «растения», «меньше» и т. д. Следствие этой задачи содержит три предиката, в то время как в посылках приведено 10 разных предикатов.

Таким образом, одно из свойств «интересных» следствий — *сокращенный по сравнению с исходными данными состав переменных или предикатов.*

Второе свойство интересных следствий тесно связано с первым: в некоторых случаях интерес представляют не только следствия с сокращенным составом переменных, но и следствия, в которых предусматривается использование заранее заданных переменных. Например, для исходных посылок в приведенном выше примере из [Chang, Lee, 1973] можно поставить задачу: проверить существование следствия с двумя переменными, среди которых обязательно присутствует пропозициональная переменная Q. Отсюда ясно, что вторым свойством «интересных» следствий является *определенный состав переменных или предикатов в сокращенном следствии.*

Еще одно свойство интересных следствий было установлено при исследовании задач с сокращенным составом переменных в следствии. Нередко результатом вычислений становится формула с большим объемом записей (например, C-система с большим числом C-кортежей). Спрашивается, можно ли сократить объем записи следствия, в частности, представить его в виде одного или двух дизъюнктов? Таким образом, третье свойство интересных следствий — *сокращенный объем его записи.*

Рассмотрим весьма важную для поиска интересных следствий теорему, доказательство которой отсутствует в цитируемых работах по АК, по-видимому, в силу ее «очевидности».

Теорема о проекциях

Пусть задана C-система $R[\mathbf{W}]$, где $\mathbf{W}$ — множество атрибутов из схемы отношения R, и $\mathbf{V} \subset \mathbf{W}$. Тогда

$$R[\mathbf{W}] \subseteq_G Pr_{\mathbf{V}}(R). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть в множестве $\mathbf{W}$ содержится n атрибутов, а в множестве $\mathbf{V}$ — k. Не нарушая общности, можно считать, что все атрибуты из $\mathbf{V}$ содержатся в левой части C-системы $R[\mathbf{W}]$ (перестановка столбцов в матричном представлении АК-объектов вместе с соответствующими перестановками имен атрибутов в схеме отношения является эквивалентным преобразованием). Пусть $R[\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} C_1^1 & \cdots & C_1^k & C_1^{k+1} & \cdots & C_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_m^1 & \cdots & C_m^k & C_m^{k+1} & \cdots & C_m^n \end{bmatrix}$.

Тогда $Pr_{\mathbf{V}}(R) = \begin{bmatrix} C_1^1 & \cdots & C_1^k \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C_m^1 & \cdots & C_m^k \end{bmatrix}$. Для проверки обобщенного включения (3) необходимо добавить в $Pr_{\mathbf{V}}(R)$ недостающие фиктивные атрибуты. Тогда получим C-систему $Q[\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} C_1^1 & \cdots & C_1^k & * & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_m^1 & \cdots & C_m^k & * & \cdots & * \end{bmatrix}$, у которой правые $n-k$ столбцов содержат только полные компоненты. Если сравнивать C-кортежи C_i из $R[\mathbf{W}]$ и $Q[\mathbf{W}]$, то, используя Теорему 1, можно убедиться, что каждый C-кортеж из R включен в соответствующий C-кортеж из Q, что доказывает теорему. ■

4. Методы вычисления интересных следствий

Если использовать традиционный способ дедуктивного анализа с помощью правил вывода, то для получения следствий с определенными свойствами весьма трудно спланировать последовательность действий, так как заранее невозможно предсказать результат применения правил. Поэтому возникает необходимость разработки более эффективных методов вычисления следствий с заранее заданными свойствами.

В АК задача существенно упрощается. Когда задано множество АК-объектов $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$, представляющих аксиомы (или посылки), то нужно вычислить минимальное следствие $A = (A_1 \cap_G A_2 \cap_G \cdots \cap_G A_n)$. Тогда для получения любого следствия достаточно построить АК-объект B такой, чтобы выполнялось соотношение $A \subseteq_G B$. Из (3) следует, что любая проекция A является его следствием. Отсюда ясно, что одним из методов вывода следствий с сокращенным составом атрибутов может быть вычисление проекций минимального следствия A.

4.1. Вычисление следствий с сокращенной схемой отношения

Если A – C-система, то любую ее проекцию легко вычислить с помощью элиминации атрибутов. При этом не всякая проекция представляет интересное следствие, так как могут быть проекции, равные универсуму — в этом случае они не содержат полезной информации.

В качестве примера рассмотрим задачу 1 из раздела 2. Предположим, что в задаче используются только первые два условия (т. е. первые три D-кортежа из D-системы $P[KLM]$). Выпишем соответствующий промежуточный результат решения задачи 1:

$$A[KLM] = P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \begin{bmatrix} \{a, b\} & \{d\} & \{a, b\} \\ \{c\} & * & \{c\} \end{bmatrix}.$$

Здесь проекции $Pr_K(A) = \{a, b, c\}$ и $Pr_L(A) = *$ являются формальными следствиями, в которых содержатся сведения о подругах, предпочитающих магазины определенной фирмы. Из содержания проекций ясно, что в фирме K совершают покупки только девушки, работающие в фирме D, в то время как товары фирмы L желательны для всех подруг.

4.2. Вычисление следствий с заданным составом атрибутов

Задача поиска следствий с заданным составом атрибутов V решается также с помощью вычисления и анализа соответствующих проекций минимального следствия.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу. Пусть посылки заданы в виде следующих дизъюнктов:

$$\neg P \vee Q \vee R;\ \ \neg P \vee \neg Q \vee \neg S;\ \ \neg P \vee Q \vee \neg R \vee S;\ \ P \vee \neg R;\ \ P \vee R \vee S.$$

Требуется выяснить, может ли следствием данной задачи быть формула, содержащая только пропозициональные переменные P и Q (другой вариант: Q и S)?

В АК все задачи и формулы исчисления высказываний можно выразить АК-объектами, у которых атрибутами являются имена пропозициональных переменных, а в качестве их доменов используются множества $\{0, 1\}$. При этом литералу X соответствует компонента $\{1\}$, а литералу $\neg X$ — компонента $\{0\}$. Тогда конъюнкт, например, $P \wedge R \wedge S$ можно выразить как C-кортеж $A_1[PRS] = [\{1\}\ \ \{1\}\ \ \{1\}]$, а дизъюнкт $P \vee \neg R$ — как D-кортеж $A_2[PR] =]\{1\}\ \ \{0\}[$.

Выразим посылки задачи в виде D-кортежей и, применяя операцию $+Atr$, построим D-систему:

$$A[PQRS] = \left]\begin{matrix} \{0\} & \{1\} & \{1\} & \varnothing \\ \{0\} & \{0\} & \varnothing & \{0\} \\ \{0\} & \{1\} & \{0\} & \{1\} \\ \{1\} & \varnothing & \{0\} & \varnothing \\ \{1\} & \varnothing & \{1\} & \{1\} \end{matrix}\right[.$$

С помощью методов, изложенных в разделе 2, преобразуем D-систему $A[PQRS]$ в C-систему. Тогда получим (проверка правильности вычислений предоставляется читателю) минимальное следствие:

$$A[PQRS] = \begin{bmatrix} \{0\} & * & \{0\} & \{1\} \\ \{1\} & \{1\} & * & \{0\} \\ \{1\} & \{0\} & \{1\} & \{1\} \end{bmatrix}.$$

Для решения задачи рассмотрим сначала проекцию $Pr_{PQ}(A)$. Эта проекция содержит 4 разных элементарных кортежа, что говорит о том, что она равна универсуму и не годится для следствия (универсум является следствием для любых посылок).

Рассмотрим проекцию $Pr_{QS}(A)$. Она содержит три элементарных кортежа: $[\{0\}\ \ \{1\}]$, $[\{1\}\ \ \{0\}]$ и $[\{1\}\ \ \{1\}]$. По таблице истинности им соответствует формула $Q \vee S$. Следовательно, эта формула есть одно из возможных следствий задачи.

Используя Теорему 2.16, можно легко проверить то, что полученный результат действительно является следствием. Выразим формулу $Q \vee S$ как D-кортеж $B[PQRS] =]\varnothing\ \ \{1\}\ \ \varnothing\ \ \{1\}[$ и проверим включение каждого C-кортежа из C-системы $A[PQRS]$ в D-кортеж $B[PQRS]$.

4.3. Сокращение объемов записи в следствиях

При вычислении следствий могут получаться C-системы, содержащие значительное число C-кортежей. Сами C-системы во многих случаях трудно преобразовать так, чтобы в них содержалось меньшее число C-кортежей, однако объем записи минимального следствия или его неполных проекций можно существенно уменьшить.

Вкратце идея заключается в следующем. Пусть известно следствие A с большим объемом записи. Тогда можно вычислить $\overline{A}$ и каким-то образом выделить его часть $A_j \subset \overline{A}$ с малым объемом записи. При вычислении его дополнения методами АК также получится АК-объект $\overline{A_j}$ с малым объемом записи, и при этом в силу закона контрапозиции будет соблюдаться соотношение $A \subset \overline{A_j}$, что позволяет выбрать $\overline{A_j}$ в качестве искомого следствия.

Рассмотрим в качестве примера часть задачи 1 из раздела 2. Пусть в качестве посылок задачи используются первые два D-кортежа D-системы $P[KLM]$. Выпишем промежуточный результат:

$$A[KLM] = P_1 \cap P_2 = \begin{bmatrix} \{a,b\} & \{d\} & * \\ \{c\} & * & \{c\} \\ \{d\} & \{d\} & \{c\} \end{bmatrix}.$$

Вычислим дополнение:

$$\overline{A}[KLM] = \left]\begin{matrix} \{c,d\} & \{a,b,c\} & \varnothing \\ \{a,b,d\} & \varnothing & \{a,b,d\} \\ \{a,b,c\} & \{a,b,c\} & \{a,b,d\} \end{matrix}\right[.$$

Чтобы легко выделить часть полученной D-системы, преобразуем ее в C-систему с помощью известного нам алгоритма. Тогда получим:

$$\overline{A}[KLM] = \begin{bmatrix} \{d\} & \{a,b,c\} & * \\ \{d\} & \{d\} & \{a,b,d\} \\ \{c\} & * & \{a,b,d\} \\ \{a,b\} & \{a,b,c\} & * \end{bmatrix}.$$

Выберем из этой C-системы какой-либо C-кортеж, например, $A_j[KLM] = [\{d\}\ \{a,b,c\}\ *]$ и вычислим его дополнение $\overline{A_j}[KLM] =]\{a,b,c\}\ \{d\}\ \varnothing[$.

В полученном D-кортеже можно удалить фиктивный атрибут. Тогда получим следующий результат: D-кортеж $\overline{A_j}[KL] =]\{a,b,c\}\ \{d\}[$ является следствием нашей задачи. Его можно выразить как дизъюнкт с соответствующими предикатами, определенными в Задаче 1.

Полученный результат легко проверяется. Для этого, используя Теорему 2.16, достаточно проверить включение каждого C-кортежа из $A[KLM]$ в D-кортеж $\overline{A_j}[KLM]$.

Таким образом, одним из методов сокращения объема записи следствия A является следующий порядок действий:

1. вычислить дополнение A и преобразовать его в C-систему;
2. если в полученной C-системе много C-кортежей, то удалить некоторые из них;
3. вычислить дополнение структуры, полученной на предыдущем шаге.

Заключение

Для заданной системы посылок предложены алгоритмы вычисления следствий со следующими свойствами:

– с сокращенным составом переменных;

– с заданным составом переменных;

– с сокращенным объемом записи.

Во всех случаях используется понятие минимального следствия, представляющего собой обобщенное пересечение АК-объектов, которые моделируют посылки. «Интересные» следствия в ряде случаев являются неполными проекциями минимального следствия.

Значительная часть современных классических и неклассических логических систем предусматривает для вывода новых следствий механизм *исчислений* т. е. получение результатов на основе правил вывода. В алгебре кортежей наряду с этим механизмом предлагается получение новых следствий с помощью *вычислений*, т. е. на основе алгоритмов, позволяющих получить требуемый результат в виде определенных операций над заданными в условии задачи структурами. В некоторых случаях, в частности, в задаче вычисления следствий с заранее заданными свойствами, этот метод имеет определенные преимущества.

Литература

Кулик, 1995 – *Кулик Б.А.* Новые классы КНФ, с полиномиально распознаваемым свойством выполнимости // Автоматика и телемеханика. 1995. № 2. С. 111–124.

Кулик и др., 2010 – *Кулик Б.А., Зуенко А.А., Фридман А.Я.* Алгебраический подход к интеллектуальной обработке данных и знаний. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. 235 с.

Кулик, 2020 – *Кулик Б.А.* Логика и математика: просто о сложных методах логического анализа / под общ. ред. А.Я. Фридмана. СПб.: Политехника, 2020. 144 с.

Плоткин, 1991 – *Плоткин Б.И.* Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных. М.: Наука, 1991. 448 с.

Шалак, 2018 – *Шалак В.И.* Анализ vs дедукция // Логические исследования. 2018. т. 24, № 1. С. 26–45.

Chang, Lee, 1973 – *Chang C.-L. and Lee R.C.-T.* Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving. New York: Academic Press, 1973. 331 p.

Courant, Robbins, 1996 – *Courant R. and Robbins H.* What is mathematics? An elementary approach to ideas and methods. New York: Oxford University Press, 1996 (2nd ed.). 566 p.

Kulik, Fridman, 2018 – *Kulik, B., Fridman A.* N-ary Relations for Logical Analysis of Data and Knowledge. Hershey, PA: IGI Global, 2018. 297 p.

Mendelson, 2015 – *Mendelson, E.* Introduction to Mathematical Logic. Boca Raton, London, New York: Taylor & Francis Group, 2015 (6th ed.). 499 pp.

Pelletier, 1986 – *Pelletier F.J.* Seventy-Five Problems for Testing Automatic Theorem Provers // Journal of Automated Reasoning. 1986, Vol. 2. P. 191—216.

Quine, 1952 – *Quine W. V.* The problem of simplifying of truth functions // Amer. Math. Monthly. 1952, Vol. 59. P. 521—531.

Boris A. Kulik

Methods to Compute Interesting Consequences

Boris A. Kulik
Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences,
Address: V.O., Bolshoj pr., 61 St. Petersburg, 199178, Russia.
E-mail: ba-kulik@yandex.ru

Abstract: In the modern theory of logical inference, obtaining new consequences from axioms or premises is allowed only with the help of inference rules. In practice, deductive analysis often applies such methods as resolutions, analytical or semantic tables, etc. However, these methods are not suitable for solving the problem of deriving consequences with predetermined properties (in some publications they are called "interesting" consequences), since those methods necessarily require for presence of the verified consequence in initial data. At the same time, the literature on logic provides no clear answer to the following questions: what properties are inherent in an interesting consequence and how to calculate such a consequence?

To solve these problems, it is proposed to use methods of our n-tuple algebra (NTA) that is based on properties of the Cartesian product of sets. The objects of NTA are arbitrary n-ary relations, which are interpreted as the domains of truth for formulas of mathematical logic. They are matrix-like structures in which cells contain subsets of the corresponding attributes rather than elements. In NTA, operations (addition, generalized intersection and generalized union) and a relation (generalized inclusion) correspond to logical connectives of mathematical logic (negation, conjunction, disjunction, implication). Calculations of quantifier operations are performed by operations with attributes (adding a dummy attribute, which corresponds to the generalization rule in predicate calculus, and eliminating an attribute). For two of the four possible types of NTA structures, elimination of attributes corresponds to computation of a projection of a relation. It is proved that any relation is a subset of its own projection.

To derive interesting consequences in NTA, we have proposed a structure called the minimal consequence that is equal to the generalized intersection of premises. Interesting consequences are calculated as projections of the minimal consequence. Eventually, calculations and checks yield consequences with reduced or predetermined lists of variables as well as with reduced notations.

Keywords: interpretation, n-tuple algebra, Cartesian product, quantifier operations, generalization rule, minimal consequence, projection, elimination of attributes

Acknowledgements. This work was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-08-00079).

References

Chang, Lee, 1973 – Chang C.-L. and Lee R.C.-T. *Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving*. New York: Academic Press, 1973. 331 pp.

Courant, Robbins, 1996 – Courant R. and Robbins H. *What is mathematics? An elementary approach to ideas and methods*. New York: Oxford University Press, 1996 (2nd ed.). 566 pp.

Kulik, 1995 – Kulik, B.A. "Novye klassy KNF, s polinomial'no raspoznavaemym svoistvom vypolnimosti" [New Classes of Conjunctive Normal Forms with a Polynomially Recognizable Property of Satisfiability], *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1995. No. 2. pp. 111–124. (In Russian)

Kulik et al., 2010 – Kulik, B.A., Zuenko, A.A., Fridman, A.Ya. *Algebraicheskij podhod k intellektual'noj obrabotke dannyh i znanij* [An Algebraic Approach to Intelligent Processing of Data and Knowledge]. Saint Petersburg: Saint Petersburg Polytechnic Univ. Publ., 2010. 235 pp. (in Russian)

Kulik, 2020 – Kulik, B.A. *Logika i matematika: prosto o slozhnyh metodah logicheskogo analiza* [Logic and mathematics: complex methods of logical analysis in plain words]. St. Petersburg: Publishing house "Polytechnic", 2020. 144 pp. (In Russian)

Kulik, Fridman, 2018 – Kulik, B.A., Fridman, A.Ya. *N-ary Relations for Logical Analysis of Data and Knowledge*. Hershey, PA: IGI Global, 2018. 297 pp.

Mendelson, 2015 – Mendelson, E. *Introduction to Mathematical Logic*. Boca Raton, London, New York: Taylor & Francis Group, 2015 (6th ed.). 499 pp.

Pelletier, 1986 – Pelletier, F.J. "Seventy-Five Problems for Testing Automatic Theorem Provers", *Journal of Automated Reasoning*, 1986, Vol. 2, pp. 191—216.

Plotkin, 1991 – Plotkin, B.I. *Universal'naja algebra, algebraicheskaya logika i bazy dannyh* [Universal algebra, algebraic logic, and databases]. Moscow: Nauka Publ., 1991. 448 pp. (In Russian)

Quine, 1952 – Quine, W.V. "The problem of simplifying of truth functions", *Amer. Math. Monthly*, 1952, Vol. 59. pp. 521—531.

Shalak, 2018 – Shalak, V.I. "Analiz vs Deduktsiya" [Analysis vs Deduction], *Logicheskie Issledovaniya* [Logical Investigations], 2018, Vol. 24, No. 1, pp. 26–45. (In Russian)