Институт Проблем машиноведения РАН,
Санкт-Петербург.

Лаборатория интеллектуальных электромеханических систем

Борис Александрович Кулик

ba-kulik@yandex.ru

Интерпретация классической логики на основе алгебры множеств

Содержание доклада

Вступление (взгляд на историю логики)

Вступление

Желание выступить на семинаре РАИИ возникло в результате двух событий в 2022 г.

1. Ознакомление докладчика с ***Приоритетными направлениями фундаментальных и поисковых научных исследований*** (ПФНИ 2021-2030), в которых в разделе 1.1.1.6. «**Математическая логика**» содержатся следующие ожидаемые результаты:
   - «**Изучение проблемы извлечения знаний на основе анализа естественного языка**, онтологий предметных областей, формальных понятий и теории измерений. **Развитие теории семантического моделирования**. **Дальнейшая разработка логических формализмов и подходов для работы с естественными языками».**
   - «Исследования по теории доказательств и основаниям математики, в том числе **взаимосвязи синтаксических и семантических свойств, структурных и алгоритмических свойств в логике**; вычислимости и определимости над произвольными структурами».
2. В процессе оживленной дискуссии с рецензентами одного солидного журнала были уточнены определения основных структур ***алгебры кортежей.*** В результате обнаружилась ***более тесная связь с некоторыми задачами ПФНИ*** 2021-2030.

Взгляд на историю логики

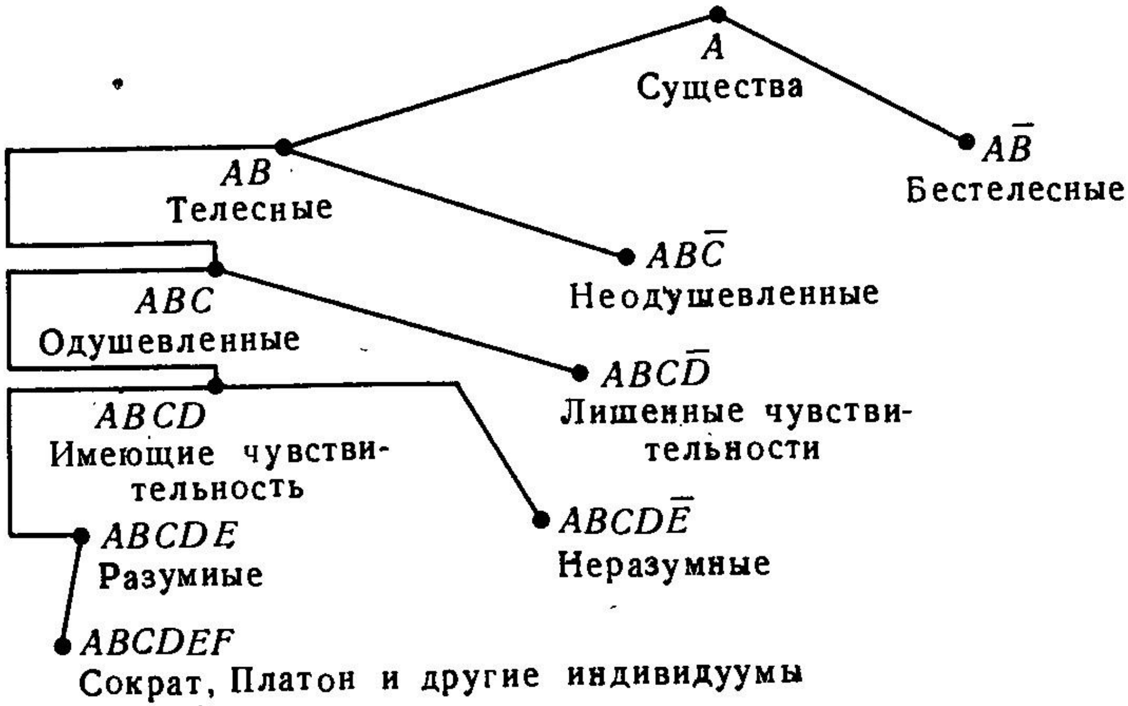
1) ***Гиппократ Хиосский*** (470 – 410 до н.э.) – **начала геометрии** (предшественник Евклида)

2) ***Аристотель*** (384 – 322 до н.э.) - **силлогистика**.

В трудах Аристотеля также содержится формулировка **законов контрапозиции** и **транзитивности** [Стяжкин, 1967, с. 40]

3) ***Порфирий*** (232—304 гг. н. э.) финикийский философ (Сирия). Открытие понятий «***универсума***» и «***дополнения***»

Древо Порфирия [Стяжкин, 1967]



Взгляд на историю логики

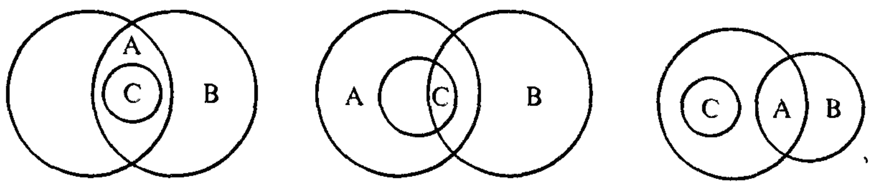
4) Книга **Л. Эйлера** «***Письма к одной немецкой принцессе о разных физических и философских материях***»

(Опубликована в 1767 – 1772 гг., Петербург на французском и русском языках)

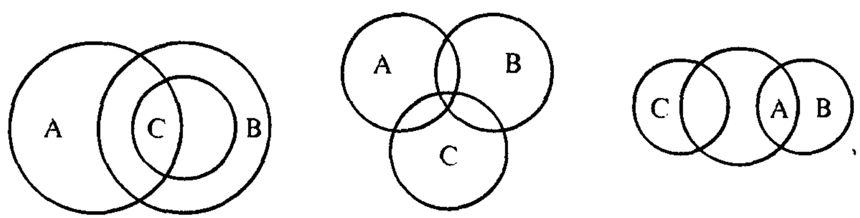
С. 219. «Поскольку в общее понятие входит ***неопределенное число индивидуальных объектов***, можно рассматривать его как некое пространство или ***круг***, внутри которого находятся все эти индивиды».

С. 227.

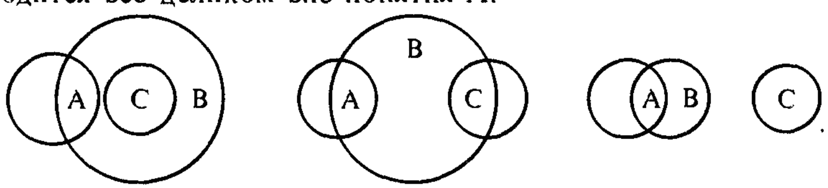
Возьмем теперь третье понятие С, которое, будучи отнесенным к понятию А, либо содержится в понятии А, как на этих схемах:



либо одной своей частью входит в понятие А:



либо находится все целиком вне понятия А:



Взгляд на историю логики

5) ***Огастес де Морган*** (1806 - 1871) – открыл **теорию отношений** (в частности, ввел операцию **соединение отношений**), открыл **законы де Моргана**.

6) ***Джордж Буль*** (1815 - 1864) – открыл **алгебру логики** (Булеву алгебру).

7) ***Платон Сергеевич Порецкий*** (1846 – 1907). Открыл **метод ортогонализации** логических формул.

8) ***Георг Кантор*** (1845 - 1918):

- разработал **теорию множеств** (совместно с ***Р. Дедекиндом*** и др.),
- ввел в математику понятие **декартово произведение множеств**,
- открыл один из **парадоксов теории множеств,**
- пришел к выводу, что **бесконечное множество равномощно своему строгому подмножеству,**
- пришел к выводу, что существуют не сравнимые по мощности бесконечные множества, в частности:

счетные множества (например, множество всех чисел натурального ряда) и

континуум (например, множество действительных чисел или точек на прямой).

Взгляд на историю логики

В связи с некоторыми открытиями Кантора возникают «наивные» вопросы.

1. Можно ли для сравнения мощностей бесконечных множеств использовать не только **принцип взаимно однозначного соответствия**, но и что-то другое?

2. Различаются ли существенно свойства множества мощности континуума P и ***равномощного ему*** множества Q, которое формируется из множества P с помощью ***удаления из него одного единственного элемента***?

Ответ на вопрос 1:

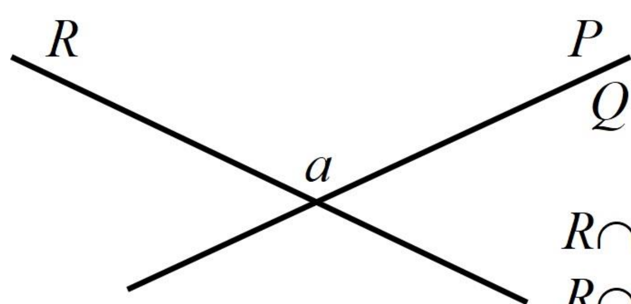
Принцип взаимно однозначного соответствия:

1 2 3 4 5 … ∞
↓ ↓ ↓ ↓ ↓ … ↓
2 4 6 8 10 … ∞

Что-то другое: 1 ***2*** 3 ***4*** 5 ***6*** 7 ***8*** … N ... ∞

При стремлении $\boldsymbol{N}$ к бесконечности соотношение между количеством чисел натурального ряда ($\boldsymbol{N}$) и количеством содержащихся в нем четных чисел ($\boldsymbol{N_2}$) стремится к $\boldsymbol{N_2/N = 0{,}5}$. А для квадратов чисел – вообще к нулю!

Ответ на вопрос 2:



$Q = P \setminus \{a\}$

$R \cap P = \{a\}$

$R \cap Q = \varnothing$

Взгляд на историю логики

9) ***Г. Фреге, Ч. С. Пирс, Дж. Пеано, Б. Рассел*** и др. (рубеж XIX и XX столетий). Дискуссия по **основаниям математики**, открытие **парадокса Рассела, С**тановление современного **аксиоматического подхода** (по сути методология **синтаксического моделирования** в логике), запрет использования термина **множество** в основаниях логики.

В основе аксиоматического метода лежат **таблицы истинности** логических связок и **аксиомы**, разные варианты которых используются в качестве оснований как для **классической**, так и для **неклассических** логик.

10) ***Рихард Курант, Г. Роббинс***. Публикация книги «Что такое математика?» (1941 г.). Используется термин «**алгебра множеств**» (впервые ли ?). Высказано предположение о возможности **доказательства законов алгебры множеств без аксиом**.

11) ***Эллиот Мендельсон*** (1931 - 2020). **Шесть** прижизненных переизданий книги «**Введение в математическую логику**» только на родном языке без учета переводов (на русском – 3-е издание - 1971 г.).

В этой книге выразил сомнение в возможности **семантического анализа** на основе **синтаксического подхода**.

Предложил **интерпретацию языка первого порядка** на основе **теории отношений** (далее об этом будет сказано более подробно).

Взгляд на историю логики

Mendelson, E. Introduction to Mathematical Logic. 2015 (6th ed.). **P. 66.** (footnote):

Since **semantical notions** are **set-theoretic in character**, and since set theory, because of the paradoxes, is considered a rather **shaky foundation** for the study of mathematical logic, many logicians consider a **syntactical approach**, consisting of a study of **formal axiomatic theories** using only rather weak number-theoretic methods, to be much safer.

«Поскольку **семантические понятия** носят **теоретико-множественный характер**, а теория множеств, по причине парадоксов, представляется в известной степени **шаткой основой** для исследований в области математической логики, то многие логики считают более надежным **синтаксический подход**, состоящий в изучении **формальных аксиоматических теорий** с применением лишь довольно слабых арифметических методов».

Э. Мендельсон, как и многие его коллеги, по-видимому, не различал теорию множеств и алгебру множеств.

Чем отличается алгебра множеств от теории множеств?

1) ***Отношение принадлежности*** ($\in$)

в **теории множеств** – основное

в **алгебре множеств** – вспомогательное, основным является **отношение включения** ($\subseteq$, $\subset$).

2) В **теории множеств** в ряде случаев множество используется в качестве элемента множества («множество всех множеств», «самоприменимое множество»). Это допущение порождает парадоксы.

В **алгебре множеств** это **необязательно** (на мой взгляд, **нежелательно**). ***Пример***:

Множество:	**Система всех подмножеств множества**:
$\{a, b, c\}$	$\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$.

Элементами системы множеств являются не множества, а их обозначения.

3) Имеются предпосылки для **доказательства законов алгебры множеств без аксиом**, т.е. только на основании определений основных понятий, операций и отношений включения и равенства.

[Курант, Роббинс, 2001; Кулик, 2020].

Содержание доклада

Вступление (взгляд на историю логики)

1. Силлогистика

1.1. Некорректности в силлогистике

1.2. Анализ полисиллогизмов на основе алгебры множеств

2. Математическая логика

2.1. Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов

2.2. Интерпретация языка математической логики

2.3. Алгебра кортежей

2.4. Интерпретация логического вывода

2.5. Нерешенные проблемы

2.6. Позитивные результаты интерпретации

Список литературы

Силлогистика

Даны 4 типа предложений (***высказываний***), которые весьма часто встречаются в повседневной речи и в рассуждениях:

A: Все *P* есть *Q* (общеутвердительное),

пример: «Все крокодилы рептилии».

I: Некоторые *P* есть *Q* (частноутвердительное),

пример: «Некоторые начальники головотяпы».

E: Все *P* не есть *Q* (общеотрицательное),

пример: «Все жирафы не земноводные» («Ни один жираф не земноводный»).

O: Некоторые *P* не есть *Q* (частноотрицательное)),

пример: «Некоторые люди не переносят критику».

A, ***I***, ***E*** и ***O*** – общепринятые обозначения типов высказываний.

Силлогистика

Силлогизм (более точное название – ***категорический силлогизм***) состоит из трех высказываний, первые два называются ***посылками***, третье – ***заключением***. В силлогизме используются три ***термина***, один из них встречается в двух посылках (он называется ***средним*** (**M**)), два других (***больший*** (**P**) и ***малый*** (**S**)) – в разных посылках. Рассмотрим силлогизм [Эйлер, 2002]:

1-я посылка: Ни один добродетельный человек (**P**) не злоречив (**M**).

2-я посылка: Некоторые злоречивые люди (**M**) — ученые (**S**).

Заключение: Некоторые ученые (**S**) не добродетельны (**P**).

Фигуры силлогизма:

Фигура 1	***Фигура 2***	***Фигура 3***	***Фигура 4***
1. $\mathbf{M \to P}$	1. $\mathbf{P \to M}$	1. $\mathbf{M \to P}$	1. $\mathbf{P \to M}$
2. $\mathbf{S \to M}$	2. $\mathbf{S \to M}$	2. $\mathbf{M \to S}$	2. $\mathbf{M \to S}$
$\mathbf{S \to P}$	$\mathbf{S \to P}$	$\mathbf{S \to P}$	$\mathbf{S \to P}$

Фигура легко распознается по расположениям среднего термина в посылках.

В нашем примере термин **M** находится в 1-й посылке на 2-м месте, а во 2-й посылке – на 1-м месте. Значит – **Фигура 4.**

Обратите внимание: в 1-й посылке может быть только термин **P**, а во 2-й – только термин **S**. Т.е. их статус определяется не по содержанию, а по номеру посылки в силлогизме.

Силлогистика

Модус силлогизма определяется составом типов высказываний в нем (например, ***AEE***) и принадлежностью к определенной фигуре (например, модус ***AAA*** Фигуры 1).

Всего возможно ***256*** различных модусов, лишь некоторые из них правильные. У разных авторов число правильных модусов может быть разным:

24 [Бочаров, Маркин, 2008];

19 [Гетманова, 2011];

15 [Copi et al., 2016].

Список правильных модусов [Бочаров, Маркин, 2008]:

- **Фигура 1**: ***AAA***, ***EAE***, ***AII***, ***EIO***, ***AAI***, ***EAO***.
- **Фигура 2**: ***AEE***, ***AOO***, ***EAE***, ***EIO***, ***AEO***, ***EAO***.
- **Фигура 3**: ***AAI***, ***EAO***, ***IAI***, ***OAO***, ***AII***, ***EIO***.
- **Фигура 4**: ***AAI***, ***AEE***, ***IAI***, ***EAO***, ***AEO***, ***EIO***.

Некорректности в силлогистике

Рассмотрим пример силлогизма:

1-я посылка: Некоторые мои сослуживцы (**P**) – вегетарианцы (**M**) – Тип ***I***

2-я посылка: Все мои друзья (**S**) не вегетарианцы (**M**) – Тип ***E***

Заключение: Некоторые мои сослуживцы (**P**) не мои друзья (**S**) – Тип ***O***

Для проверки:

Фигура 1	*Фигура 2*	*Фигура 3*	*Фигура 4*
1. $M \to P$	1. $P \to M$	1. $M \to P$	1. $P \to M$
2. $S \to M$	2. $S \to M$	2. $M \to S$	2. $M \to S$
$S \to P$	$S \to P$	$S \to P$	$S \to P$

Фигура 1: ***AAA***, ***EAE***, ***AII***, ***EIO***, ***AAI***, ***EAO***.

Фигура 2: ***AEE***, ***AOO***, ***EAE***, ***EIO***, ***AEO***, ***EAO***.

Фигура 3: ***AAI***, ***EAO***, ***IAI***, ***OAO***, ***AII***, ***EIO***.

Фигура 4: ***AAI***, ***AEE***, ***IAI***, ***EAO, AEO***, ***EIO***.

Получается Фигура 2, но в списке правильных модусов этой фигуры нет модуса ***IEO***. Значит ***силлогизм неправильный***.

Поменяем местами посылки. Заодно согласно правилам изменим статус терминов «мои друзья» и «мои сослуживцы»

1-я посылка: Все мои друзья (***P***) не вегетарианцы (***M***) – Тип ***E***

2-я посылка: Некоторые мои сослуживцы (***S***) – вегетарианцы (***M***) – Тип ***I***

Заключение: Некоторые мои сослуживцы (***S***) не мои друзья (***P***) – Тип ***O***

Получается Фигура 2, и списке правильных модусов этой фигуры есть модус ***EIO***. Значит ***силлогизм правильный***.

Некорректности в силлогистике

Еще 1 пример: модус ***AAA*** Фигура 1 (модус *Barbara*)
1-я посылка: Все люди (***M***) смертны (***P***) – Тип ***A***
2-я посылка: Сократ (***S***) – человек (***M***) – Тип ***A***
Заключение: Сократ (***S***) смертен (***P***) – Тип ***A***

Для проверки:

Фигура 1	Фигура 2	Фигура 3	Фигура 4
1. $M \to P$	1. $P \to M$	1. $M \to P$	1. $P \to M$
2. $S \to M$	2. $S \to M$	2. $M \to S$	2. $M \to S$
$S \to P$	$S \to P$	$S \to P$	$S \to P$

Фигура 1: ***AAA***, ***EAE***, ***AII***, ***EIO***, ***AAI***, ***EAO***.
Фигура 2: ***AEE***, ***AOO***, ***EAE***, ***EIO***, ***AEO***, ***EAO***.
Фигура 3: ***AAI***, ***EAO***, ***IAI***, ***OAO***, ***AII***, ***EIO***.
Фигура 4: ***AAI***, ***AEE***, ***IAI***, ***EAO, AEO***, ***EIO***.

Поменяем местами посылки
1-я посылка: Сократ (***P***) – человек (***M***) – Тип ***A***
2-я посылка: Все люди (***M***) смертны (***S***) – Тип ***A***
Заключение: ?????

Получается ***Фигура 4***, в этой фигуре нет модуса ***AAA***, но есть модус ***AAI***, к тому же термин «Сократ» стал большим термином (***P***).

В соответствии с правилами получаем следующее

Заключение: **Некоторые (а возможно, и все) смертные есть часть Сократа (а возможно, и весь Сократ).**

Стоит ли комментировать?

Содержание доклада

Анализ полисиллогизмов на основе алгебры множеств

<u>Полисиллогизм</u> содержит произвольное множество высказываний.

Выразим типы высказываний в терминах алгебры множеств.

Пусть A, B, C, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ – множества, представляющие термины или их отрицания.

Пусть α, β, … – непустые множества, обозначающие безымянные (***неопределенные***) термины. Их будем использовать для выражения частных высказываний. Тогда

Тип ***A*** (Все A есть B) $\Rightarrow$ $A \subseteq B$;

Тип ***E*** (Все A не есть B) $\Rightarrow$ $A \subseteq \overline{B}$;

Тип ***I*** (Некоторые A есть B) $\Rightarrow$ $\alpha \subseteq (A \cap B)$;

Тип ***O*** (Некоторые A не есть B) $\Rightarrow$ $\beta \subseteq (A \cap \overline{B})$.

В предлагаемой модели можно **расширить состав** типов высказываний:

1) Разрешается использовать термины с отрицанием в начале высказывания:

Например, $\overline{B} \subseteq C$; $\beta \subseteq (\overline{A} \cap B)$.

2) Во второй части высказывания могут быть несколько разных терминов:

Например, «Все A есть B и не C», т.е. $A \subseteq (B \cap \overline{C})$.

Совокупность высказываний полисиллогизма можно представить как один из типов частично упорядоченного множества: – ***структура Эйлера*** (или ***E-структура***) [Кулик, 2001].

Анализ полисиллогизмов на основе алгебры множеств

Тогда в качестве ***правил вывода*** полисиллогизмов используются следующие ***законы алгебры множеств***:

1) ***контрапозиции***: $A \subseteq B$ равносильно $\overline{B} \subseteq \overline{A}$;
2) ***транзитивности***: если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$;
3) ***инволюции*** (двойного дополнения); $\overline{\overline{A}}$ равносильно A.
4) ***условие непустого пересечения множеств***:

если $\alpha \neq \varnothing$, и известно, что $\alpha \subseteq A$ и $\alpha \subseteq B$, то справедливо:

$\alpha \subseteq (A \cap B)$, т. е. «Некоторые A есть B».

Рассмотрим пример

1) Все мои друзья хвастуны и не скандалисты.

2) Все хвастуны не уверены в себе.

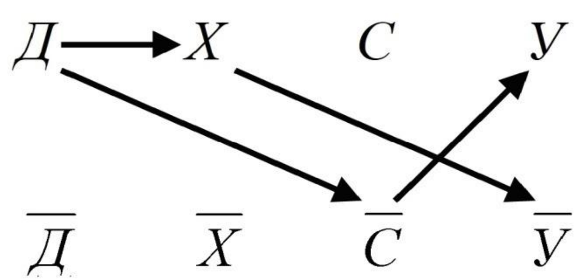
3) Все не скандалисты уверены в себе.

Что из этого следует?

Обозначим :

$Д$ – мои друзья, X – хвастуны,

C – скандалисты, $У$ – уверенные в себе.

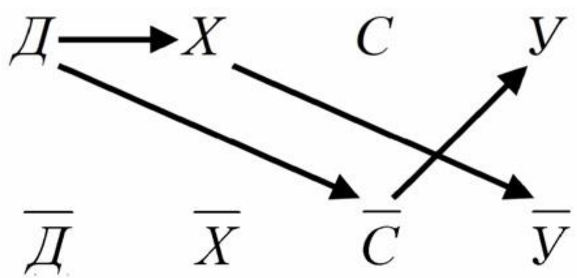


Затем нарисуем схему, в которой изобразим все посылки.

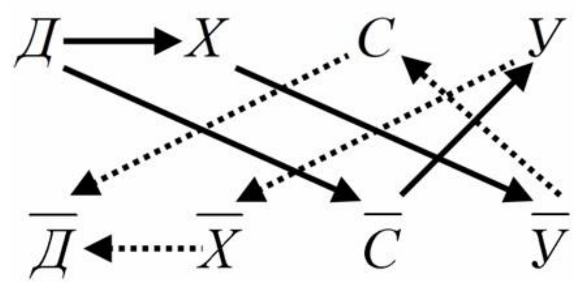
Анализ полисиллогизмов на основе алгебры множеств

Продолжим анализ. Вначале применим ***правило контрапозиции*** ко всем посылкам

Исходная схема:



После применения правила контрапозиции:



Далее применим ***правило транзитивности***. Для этого выделим все цепочки литер в схеме:

1) $Д \to \overline{С} \to У \to \overline{Х} \to \overline{Д}$ 2) $Д \to Х \to \overline{У} \to С \to \overline{Д}$

В обоих случаях получили $Д \to \overline{Д}$ – ***коллизия парадокса***.

Т.е. по законам алгебры множеств $Д = \varnothing$.

Избавиться от парадокса можно с помощью корректировки посылок.

Например, заменить «***Все не скандалисты уверены в себе***» на

«***Все уверенные в себе не скандалисты***». Тогда парадокса не будет!

Анализ полисиллогизмов на основе алгебры множеств

Вывод частных высказываний

Рассмотренный ранее пример силлогизма:

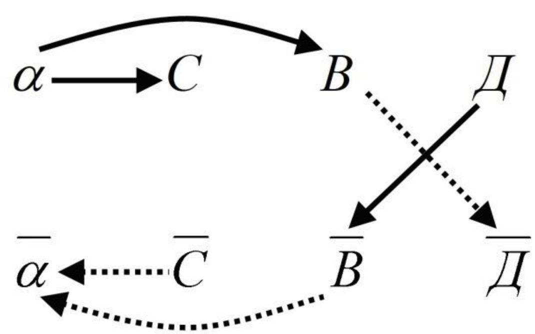
1-я посылка: Некоторые мои сослуживцы – вегетарианцы.

2-я посылка: Все мои друзья не вегетарианцы.

Для получения заключения нет необходимости выяснять, к какой фигуре относится силлогизм, каков статус терминов и т. д.

Просто построим схему.

Обозначим *С* – сослуживцы, *Д* – друзья, *В* – вегетарианцы. Тогда посылки и их контрапозиции можно выразить так:



На схеме видно, что из литеры α «достижимы» литеры C и $\overline{Д}$, а значит, $\alpha \subseteq (C \cap \overline{Д})$, т.е. «Некоторые мои сослуживцы не мои друзья».

Выводы

По сравнению с силлогистикой

1) предложенная методика анализа рассуждений математически обоснована и сравнительно проста в использовании;

2) в ней отсутствуют неопределенности и некорректности традиционной силлогистики;

3) с ее помощью сравнительно легко анализируются не только силлогизмы, но и произвольные множества суждений (полисиллогизмы);

4) она позволяет анализировать гипотезы, абдуктивные заключения, а также логические некорректности типа парадокса или цикла.

Содержание доклада

Математическая логика

Существует немало типов рассуждений и обоснований, которые нельзя выразить и решить с помощью силлогистики. Вот простой пример такого рассуждения [Чень, Ли, 1983]:

***1-я посылка*: Некоторые пациенты любят всех докторов.**

***2-я посылка*: Ни один пациент не любит знахарей.**

***Следовательно*, никакой доктор не является знахарем.**

Для анализа этого рассуждения требуются далеко не самые простые методы исчисления предикатов (сведение к предваренной нормальной форме, алгоритм унификации и т. д.).

Посмотрим, что получится, если в математической логике использовать алгебру множеств. Выше была показана полезность такого подхода на примере силлогистики.

Но удастся ли сделать нечто подобное с математической логикой?

Ответ. Задача решена лишь частично (подробности ниже).

Можно ли эти результаты рассматривать как начало для будущих исследований в этом направлении?

Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов

Цитируется по [Mendelson, 2015]

Математическая логика содержит два раздела, предназначенных для дедуктивного анализа: относительно простое ***исчисление высказываний*** и весьма сложное ***исчисление предикатов***.

Предусматриваются две системы обоснования:

1) ***таблицы истинности*** для логических связок ¬ (не), ∧ (и), ∨ (или), ⊃ (если, то).

С помощью таблиц истинности можно обосновать только теоремы исчисления высказываний.

2) ***язык первого порядка*** ($\mathcal{L}$), в котором используется определенный алфавит для обозначения ***логических связок*** (¬, ⊃, ∧, ∨, ∀ (для всех), ∃ (существует)), ***переменных***, ***констант*** (значений переменных), ***функций*** и ***предикатов***. Излагаются правила, с помощью которых формируются правильно построенные формулы (***ппф***).

Язык $\mathcal{L}$, в свою очередь, используется для построения ***теории первого порядка*** K, в которой используются ***ппф*** языка $\mathcal{L}$, а также ***аксиомы*** и ***правила вывода***, причем аксиомы делятся на два класса: ***логические*** и ***собственные*** (или нелогические).

Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов

<u>Логические аксиомы</u>: если $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, и $\mathcal{D}$ – ***ппф*** языка $\mathcal{L}$, то ***теория*** K содержит следующие аксиомы:

(A1) $\mathcal{B} \supset (\mathcal{C} \supset \mathcal{B})$;

(A2) $(\mathcal{B} \supset (\mathcal{C} \supset \mathcal{D})) \supset ((\mathcal{B} \supset \mathcal{C}) \supset (\mathcal{B} \supset \mathcal{D}))$;

(A3) $(\neg\mathcal{C} \supset \neg\mathcal{B}) \supset ((\neg\mathcal{C} \supset \mathcal{B}) \supset \mathcal{C})$;

(A4) $(\forall x_i)\mathcal{B}(x_i) \supset \mathcal{B}(t)$;

(A5) $(\forall x_i)(\mathcal{B} \supset \mathcal{C}) \supset (\mathcal{B} \supset (\forall x_i)\mathcal{C})$.

Собственные (нелогические) аксиомы используются для построения различных теорий (**теория групп, формальная арифметика** и т.д.).

Если собственных аксиом нет, то теория K называется ***исчислением предикатов первого порядка***.

<u>Правила вывода</u> теории K:

1. ***Modus ponens*** (MP): из $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B} \supset \mathcal{C}$ следует $\mathcal{C}$.

2. ***Правило обобщения*** (Gen): из $\mathcal{B}$ следует $(\forall x_i)\mathcal{B}$.

Формулировка правила Gen в [Mendelson, 2015] вызывает некоторые сомнения. О них будет сказано далее.

Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов

- Вопросы:

Вопрос первый: почему эти аксиомы и правила весьма трудно использовать в качестве методов обоснований в естественных рассуждениях? В искусственном интеллекте, в частности, в таких его разделах, как «**Моделирование рассуждений**» и «**Автоматическое доказательства теорем**», эти правила не используются в силу малой эффективности, но применяются принципиально иные методы, например, метод резолюций и алгоритм унификации [Чень, Ли, 1983].

Вопрос второй: почему с помощью средств математической логики трудно, а иногда просто невозможно применять многие необходимые в естественных рассуждениях методы **логического анализа**, такие, как **формулирование и проверка гипотез**, **анализ неопределенностей**, распознавание и **анализ ошибок и некорректностей в рассуждениях**, **вывод следствий с заданными свойствами**, **вывод абдуктивных заключений** и т.д.?

Не в том ли причина, что в математической логике не установлена связь с семантикой, т.е. с ***интерпретацией***, в основе которой лежит ***алгебра множеств***?

Содержание доклада

Интерпретация языка математической логики

В [Mendelson, 2015] предлагается ***интерпретация языка первого порядка*** $\mathcal{L}$.

Область интерпретации (*domain*) ***любой переменной***	множество D
n-местные предикаты и ***формулы со свободными переменными***	подмножество ***декартова произведения*** D^n

Еще определена интерпретация ***функций***. Здесь она не понадобится.

Пояснение:

Если переменная не находится в области действия какого-либо квантора, то она считается ***свободной***. Например, в формуле $\forall y(P(x) \wedge Q(x, y))$ переменная x свободная, в то время как переменная y – ***связанная***.

То, что в этой формуле оказывается свободной единственная переменная x, означает, что интерпретацией этой формулы является какое-то подмножество (возможно, пустое) области D изменения переменной x.

Если бы не было квантора $\forall y$, то свободными были бы переменные x и y, а интерпретацией этой формулы было бы некоторое двухместное отношение, т.е. подмножество D^2.

Ясно, что интерпретация языка $\mathcal{L}$ - это по сути

упрощенный вариант математической теории отношений.

Интерпретация языка математической логики

Немного усложним предлагаемый Мендельсоном вариант интерпретации.

Изменение 1. Для разных переменных языка $\mathcal{L}$ будем использовать не одну какую-то область интерпретации D, а разные области интерпретации (X, Z и т.д.). Поэтому, во избежание возможных несогласованностей, по аналогии с базами данных будем приписывать к именам интерпретаций формул языка $\mathcal{L}$ ***схему отношения***, т.е. последовательность имен областей интерпретации переменных, формирующих это отношение. С учетом этого, имена областей интерпретации переменных названы ***атрибутами***, а области интерпретации атрибутов – ***доменами***.

Изменение 2. Для многих задач логического анализа более удобно рассматривать n-местное отношение не как ***множество кортежей элементов***, а как ***объединение декартовых произведений*** (ДП). Поскольку ДП формируется из множеств, то в качестве значений атрибута используются не элементы его домена, а имена или обозначения (например, A_2 или $\{b, d\}$) всех подмножеств домена. Множества с этими именами или обозначениями названы ***компонентами*** атрибута. Короче: *компоненты – это произвольные подмножества домена атрибута*.

Объединение декартовых произведений – новая ранее не исследованная математическая структура. Результат ее исследования – ***алгебра кортежей***.

Интерпретация языка математической логики

В литературе по математике ***декартово произведение множеств***, которое ввел в математику Г. Кантор [Бурбаки, 1965, с. 307], используется часто, но его ***интересные свойства, связанные с логикой***, оказывается, почти неизвестны.

<u>Декартово произведение</u> (ДП) n множеств $X, Y, \ldots, Z$ есть множество всех возможных n-местных кортежей, у которых на первом месте стоит элемент множества X, на втором – элемент множества Y, …, а на последнем – элемент множества Z.

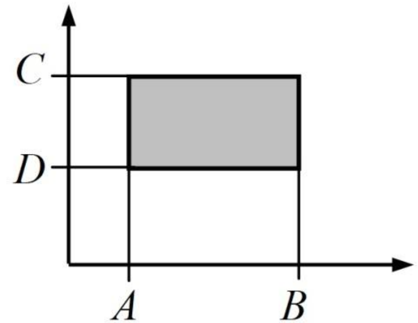
Декартово произведение множеств $X, Y, \ldots, Z$ обозначается $X \times Y \times \ldots \times Z$.

Рассмотрим три примера ДП.

Пример 1. Для двух множеств $X = \{a, b\}$, $Y = \{a, d, f\}$

$$X \times Y = \{(a, a), (a, d), (a, f), (b, a), (b, d), (b, f)\}.$$

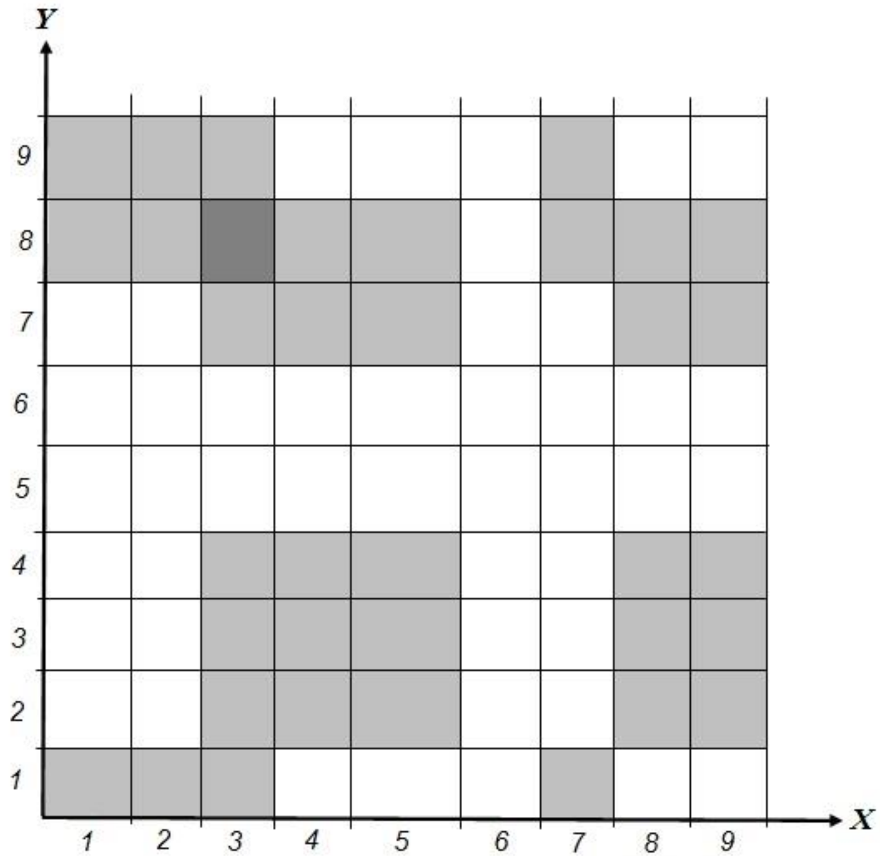
Пример 2. Даны два отрезков AB и CD, находящихся на разных координатных осях. Тогда $AB \times CD$ – это закрашенная область на рисунке



Интерпретация языка математической логики

Пример 3: объединение декартовых произведение и его «изображение» (пример использования алгебры кортежей в задачах кластеризации):

$$R[XY] = (\{1,2,3,7\} \times \{1,8,9\}) \cup (\{3,4,5,8,9\} \times \{2,3,4,7,8\})$$



Здесь цифры – обозначения идущих подряд интервалов на координатных осях.

Интерпретация языка математической логики

Объединение декартовых произведений, рассматриваемое как отдельная структура, ранее не исследовалось. Для этой структуры не были известны алгоритмы операций (дополнение, пересечение, объединение), алгоритмы проверок включения одной структуры в другую и т.д. В публикациях содержатся только отдельные операции для ДП (их пересечение и разность), а также алгоритм проверки включения одного ДП в другое. Оказалось, что все эти алгоритмы и их обоснования можно существенно упростить, если отказаться от общепринятых обозначений ДП

$$(D^n, \quad A \times B \times C, \quad \prod_{i=1}^{n} D_i \quad \text{и т.д.})$$

Вместо этого в ***алгебре кортежей*** предложено представлять ДП как кортежи компонент, при этом каждая компонента с помощью схемы отношения привязывается к определенному атрибуту.

Определяемый ниже ***С-кортеж*** как раз и является подобной записью ДП. Тогда более сложные структуры записываются ***в виде матриц***.

Содержание доклада

Алгебра кортежей

Алгебра кортежей (АК)– математическая система для моделирования и анализа ***многоместных отношений***, основанная на свойствах ***декартова произведения множеств*** (ДП) . Структуры АК называются ***АК-объектами***.

Их всего 4:

C-кортежи, C-системы, ***D-кортежи*** и ***D-системы.***

Связь с математической логикой:

C-кортеж соответствует ***конъюнкции*** (*conjunction*) одноместных предикатов;

D-кортеж – ***дизъюнкции*** (*disjunction*) одноместных предикатов;

C-система – ***дизъюнктивной нормальной форме*** (ДНФ);

D-система – ***конъюнктивной нормальной форме*** (КНФ).

Как известно, КНФ и ДНФ – универсальные типы формул математической логики. Любую формулу можно преобразовать в ДНФ или КНФ.

К именам АК-объектов приписывается ***схема отношения*** – заключенная в квадратные скобки последовательность атрибутов.

Например, запись $R[KLM]$ означает, что отношение $R[KLM] \subseteq K \times L \times M$.

АК-объекты с одинаковыми схемами отношений называются ***однотипными***.

Алгебра кортежей

В ячейках строк (кортежей) и матриц АК-объектов записываются ***компоненты*** (подмножества соответствующих атрибутов).

Определены **фиктивные компоненты**:

полная компонента ($*$) равна домену соответствующего атрибута;

пустая компонента ($\varnothing$) равна пустому множеству

<u>C-кортеж</u> - есть n-местное отношение, равное ДП содержащихся в нем компонент, которые записаны в виде кортежа, ограниченного квадратными скобками.

Пример C-кортежа: $T[XYZ] = [A * B]$,

где $A \subseteq X$, $B \subseteq Z$, а компонента «*» равна домену соответствующего атрибута (в данном случае, поскольку она находится на второй позиции, то $* = Y$).

Преобразование $T[XYZ]$ в обычное отношение:

$$T[XYZ] = A \times Y \times B.$$

C-кортеж $T[XYZ]$ соответствует логической формуле (***конъюнкту***):

$$T(x, z) = A(x) \wedge \text{True} \wedge B(z) = A(x) \wedge B(z),$$

где $A(x)$ и $B(z)$ – одноместные предикаты.

Интерпретацией одноместных предикатов $A(x)$ и $B(z)$ являются компоненты A и B соответствующих атрибутов.

Домены любого атрибута соответствуют в логике константе ***True***.

Алгебра кортежей

Для C-кортежей доказаны следующие соотношения:

Теорема 1 (проверка включения однотипных C-кортежей). Пусть даны два однотипных C-кортежа $P = [P_1\ P_2\ \dots\ P_N]$ и $Q = [Q_1\ Q_2\ \dots\ Q_N]$. Тогда $P \subseteq Q$, если и только если $P_i \subseteq Q_i$ верно для всех соответствующих пар компонент сравниваемых C-кортежей.

Теорема 2 (пересечение однотипных C-кортежей). Пусть даны два однотипных C-кортежа $P = [P_1\ P_2\ \dots\ P_N]$ и $Q = [Q_1\ Q_2\ \dots\ Q_N]$. Тогда

$$P \cap Q = [P_1 \cap Q_1\ \ P_2 \cap Q_2\ \ \dots\ \ P_N \cap Q_N].$$

Теорема 3 (пустое пересечение однотипных C-кортежей). Пусть даны два однотипных C-кортежа $P = [P_1\ P_2\ \dots\ P_N]$ и $Q = [Q_1\ Q_2\ \dots\ Q_N]$, и в них имеется, по крайней мере, одна пара P_i и Q_i компонент, для которых $P_i \cap Q_i = \varnothing$. Тогда $P \cap Q = \varnothing$.

В то же время ***объединение С-кортежей*** может быть C-кортежем лишь в частных случаях. ***Поэтому нужна новая структура***.

С-система – это отношение, равное объединению однотипных C-кортежей, которое записывается в виде матрицы, ограниченной квадратными скобками.

Например, $R[XYZ] = \begin{bmatrix} A_1 & * & A_3 \\ B_1 & B_2 & * \end{bmatrix}$ есть C-система, при этом $A_1 \subseteq X$, $A_3 \subseteq Z$ и т.д. Данная C-система преобразуется в обычное отношение с помощью ДП следующим образом:

$$R[XYZ] = (A_1 \times Y \times A_3) \cup (B_1 \times B_2 \times Z).$$

Алгебра кортежей

Для вычисления дополнений АК-объектов требуются новые структуры.

Диагональная С-система – это C-система размерности $n \times n$, у которой все недиагональные компоненты – полные (∗).

Например, $Q[XYZ] = \begin{bmatrix} A & * & * \\ * & B & * \\ * & * & C \end{bmatrix}$ – диагональная C-система.

Доказана следующая теорема:

Теорема 9. Дополнение C-кортежа $P = [P_1 \;\; P_2 \;\; \ldots \;\; P_{n\text{-}1} \;\; P_n]$ есть диагональная C-система $R = \begin{bmatrix} \overline{P_1} & * & \ldots & * \\ * & \overline{P_2} & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ * & * & \ldots & \overline{P_n} \end{bmatrix}$ размерности $n \times n$, где каждая диагональная компонента – дополнение соответствующей компоненты C-кортежа P.

D-кортеж – это отношение, равное диагональной C-системе и записанное как ограниченный перевернутыми квадратными скобками кортеж ее диагональных компонент.

Например, диагональная система $Q[XYZ] =]A \;\; B \;\; C[$ (D-кортеж).

Алгебра кортежей

D-система есть отношение, равное пересечению однотипных *D*-кортежей и записанное как ограниченная перевернутыми квадратными скобками матрица компонент, в которой строками являются участвующие в операции *D*-кортежи.

С помощью *D*-систем легко вычислять дополнение *C*-систем.

$$\text{Пусть } P[XYZ] = \begin{bmatrix} A & * & C \\ D & E & * \end{bmatrix} \ (C\text{-система}).$$

$$\text{Тогда } \overline{P}[XYZ] = \left]\begin{matrix} \overline{A} & \varnothing & \overline{C} \\ \overline{D} & \overline{E} & \varnothing \end{matrix}\right[\ (D\text{-система}).$$

В математической логике *D*-системе соответствует ***конъюнктивная нормальная форма*** (КНФ).

Универсум АК-объекта (***U***) определяется как ДП доменов атрибутов, заданных в его схеме отношения. Например, для АК-объекта *R*[*XYZ*] универсум есть $\mathbf{U} = X \times Y \times Z$.

Если при вычислении установлено, что некоторая *C*-система равна универсуму, то она есть интерпретация ***общезначимой формулы*** или ***тавтологии***,

Если же некоторая *D*-система окажется равной пустому множеству, то она соответствует ***тождественно ложной формуле*** или ***противоречию***.

Элементарные кортежи, содержащиеся в АК-объектах, соответствуют ***выполняющим подстановкам*** логических формул.

Алгебра кортежей

Операции с атрибутами (+*Atr* и –*Atr*) в АК соответствуют кванторным операциям в исчислении предикатов.

Добавление фиктивного атрибута (+*Atr*)

$$R[XZ] = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{bmatrix}; \quad +Y(R\,[XZ]) = R_k[XYZ] = \begin{bmatrix} A_1 & * & A_3 \\ B_1 & * & B_3 \end{bmatrix}.$$

$$Q[XZ] = \left]\begin{matrix} C_1 & C_3 \\ D_1 & D_3 \end{matrix}\right[; \quad +Y(Q[XZ]) = Q_k[XYZ] = \left]\begin{matrix} C_1 & \varnothing & C_3 \\ D_1 & \varnothing & D_3 \end{matrix}\right[.$$

Операция +*Atr* соответствует ***правилу обобщения*** (Gen):

из $\mathcal{B}$ следует $(\forall x_i)\mathcal{B}$..

С ее помощью выполняются ***обобщенные операции*** пересечения ($\cap_G$) и объединения ($\cup_G$) АК-объектов:

Например, операция ***соединения отношений***:

$$P[XY] = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{bmatrix}; \; Q[YZ] = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ D_1 & D_2 \end{bmatrix};$$

$$P[XY] \cap_G Q[YZ] = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & * \\ B_1 & B_2 & * \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} * & C_1 & C_2 \\ * & D_1 & D_2 \end{bmatrix}.$$

Алгебра кортежей

Элиминация атрибута ($-Atr$)

$$\text{Пусть } P[XYZ] = \left]\begin{matrix} A_1 & \varnothing & P_2 \\ B & \{a, c, f\} & \varnothing \\ \varnothing & \{b, c\} & P_1 \end{matrix}\right[\text{. Тогда } -Y(P[XYZ]) = \left]\begin{matrix} A_1 & P_2 \\ B & \varnothing \\ \varnothing & P_1 \end{matrix}\right[$$

Логический смысл этой операции, в отличие от $+Atr$, уже зависит от типа АК-объекта (теоремы 31 и 32 в [Кулик, 2020]).

Пусть $P[\ldots X\ldots]$ – интерпретация логической формулы $F(\ldots x\ldots)$ со свободной переменной x. Тогда:

-если P – ***C*-кортеж или *C*-система**,

то **$-X(P)$ – интерпретация формулы $\exists x(F)$**;

-если P – ***D*-кортеж или *D*-система**,

то **$-X(P)$ –интерпретация формулы $\forall x(F)$**.

В частности, если $-Y(P[XYZ]) \neq \varnothing$, то каждому элементарному кортежу в этой формуле соответствует множество всех значений атрибута X в АК-объекте $P[XYZ]$.

Алгебра кортежей

Проекцией АК-объекта называется результат однократного или многократного применения операции $-Atr$ к АК-объекту, выраженному как C-кортеж или C-система.

Проекция, в частности, используется при решении **задачи вывода следствий с заранее заданными свойствами** [Кулик, 2021].

Если задана C-система $R[XYZ]$, то ее проекции обозначаются соответственно $Pr_{XY}(R)$, $Pr_{Y}(R)$, $Pr_{XZ}(R)$ и т. д.

В частности, проекция $Pr_{XZ}(R)$ вычисляется путем элиминации атрибута Y: $Pr_{XZ}(R) = -Y(R[XYZ])$.

Фиктивные атрибуты.

Пусть задана C-система $R[\boldsymbol{W}]$, где $\boldsymbol{W}$ – множество атрибутов и $Pr_{W\setminus X}(R)$ – проекция $R[\boldsymbol{W}]$, в которой присутствуют все атрибуты, кроме X.

Тогда X есть ***фиктивный атрибут*** в $R[\boldsymbol{W}]$, если соблюдается следующее равенство

$$R[\boldsymbol{W}] = +X(Pr_{W\setminus X}(R)) \qquad (1)$$

Равенство (1) означает, что в АК-объекте $R[\boldsymbol{W}]$ каждому элементарному кортежу из проекции $Pr_{W\setminus X}(R)$ соответствует множество всех значений атрибута X. *И еще одно свойство*: значения в фиктивном атрибуте не зависят от значений других атрибутов.

Содержание доклада

Интерпретация логического вывода

По аналогии с обобщенными операциями $\cap_G$ и $\cup_G$ в ***алгебре кортежей*** применяются ***обобщенные отношения*** $=_G$ и $\subseteq_G$.

При их проверке АК-объекты предварительно приводятся к одинаковой схеме отношения с помощью операции ***+Atr***.

В алгебре кортежей предложен и обоснован новый метод проверки правильности следствия.

Пусть АК-объекты $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – интерпретации формул $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$, которые являются посылками рассуждения, а АК-объект B – интерпретация предполагаемого следствия $\mathcal{B}$.

Тогда $\mathcal{B}$ ***выводимо из*** $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$, если и только если для их интерпретаций соблюдается соотношение:

$$(A_1 \cap_G \ldots \cap_G A_n) \subseteq_G B \qquad (2)$$

АК-объект, полученный в результате вычисления выражения в левой части (2), называется в АК ***минимальным следствием***.

Минимальное оно потому, что любое его строгое подмножество ***не является следствием***.

Интерпретация логического вывода

Пример 4. Соотношение (2) можно применить при решении задачи из [Чень, Ли, 1983]: «Некоторые пациенты любят всех докторов. Ни один пациент не любит знахарей. Следовательно, никакой доктор не является знахарем».

Пусть заданы множества P – пациенты, D – доктора, Q – знахари, $P_1 \subseteq P$ – некоторые пациенты, $L[XY]$ – отношение «x любит y», заданное как C-система. Пусть она нам неизвестна, но в данном случае это неважно.

Тогда первая посылка:

$$A_1[XY] = [P_1 \quad D].$$

$$A_2[XY] = L[XY] \cap [P \quad \overline{Q}\,]$$

(при пересечении образуется C-система, в которой из атрибута X исключены все не пациенты, а из атрибута Y – все знахари).

Вычисляем минимальное следствие:

$$A[XY] = A_1 \cap A_2 = [P_1 \quad D] \cap (L[XY] \cap [P \quad \overline{Q}\,]) = L[XY] \cap [P_1 \quad D \cap \overline{Q}\,].$$

<u>Отрицание заключения</u>: $D \cap Q = Q_1 \neq \varnothing$.

Q_1 может присутствовать в каждом атрибуте, т.е. верно $[Q_1 \quad Q_1]$. Тогда

$$A[XY] \cap [Q_1 \quad Q_1] = L[XY] \cap [P_1 \cap Q_1 \quad D \cap \overline{Q} \cap Q_1] = \varnothing,$$

так как $\overline{Q} \cap Q_1 = \varnothing$.

Интерпретация логического вывода

Пример 5. В универсуме $\{a, b, c, d\}^3$ задана D-система.

$$P[KLM] = \left]\begin{array}{ccc} A & \varnothing & B \\ B & \overline{D} & \varnothing \\ B & \varnothing & A \\ \overline{A} & \overline{C} & \varnothing \\ C & \varnothing & C \end{array}\right[= \left]\begin{array}{ccc} \{a,b\} & \varnothing & \{c\} \\ \{c\} & \{d\} & \varnothing \\ \{c\} & \varnothing & \{a,b\} \\ \{c,d\} & \{b,c\} & \varnothing \\ \{a,d\} & \varnothing & \{a,d\} \end{array}\right[.$$

Нужно проверить равенство $P[KLM] = \varnothing$,
т. е. по сути решить задачу ВЫПОЛНИМОСТИ.

Особенность этого примера в том, что для его решения не требуется преобразования в задачу исчисления высказываний, как это обычно делается в автоматическом доказательстве теорем.

Данный пример легко решается с помощью алгоритма преобразования D-системы в C-систему с использованием ортогонализации (Теоремы 25 и 27 в [Кулик, 2020]). Эти теоремы приведены на следующем слайде.

Для этой задачи главная проблема заключалась в том, чтобы подобрать «житейский» пример для нее. Пример с большим трудом мне удалось придумать. Далее он будет показан.

Интерпретация логического вывода

Теорема 25 (преобразование D-системы в C-систему). D-система P, содержащая m D-кортежей, эквивалентна C-системе, которая является пересечением m C-систем, полученных с помощью преобразования каждого D-кортежа из P в диагональную C-систему.

Теорема 27 (ортогонализация). D-кортеж вида $]Q_1\ \ Q_2\ \ \ldots\ \ Q_{m-1}\ \ Q_m[$ преобразуется в эквивалентную ему ортогональную C-систему:

$$\begin{bmatrix} Q_1 & * & \ldots & * & * \\ \overline{Q_1} & Q_2 & \ldots & * & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overline{Q_1} & \overline{Q_2} & \ldots & Q_{m-1} & * \\ \overline{Q_1} & \overline{Q_2} & \ldots & \overline{Q_{m-1}} & Q_m \end{bmatrix}.$$

<u>Ортогонализация</u> используется для расчета ***вероятностей событий***, выраженных логическими формулами или АК-объектами.

Кроме того ортогонализация позволяет значительно ***уменьшить трудоемкость вычислений*** при преобразовании D-системы в C-систему, в частности, при решении задачи ***выполнимость КНФ***.

Интерпретация логического вывода

А теперь «житейский» пример для задачи.

$$\begin{array}{ccc} K & L & M \\ \end{array}$$

$$\left]\begin{array}{ccc} \{a,b\} & \varnothing & \{c\} \\ \{c\} & \{d\} & \varnothing \\ \{c\} & \varnothing & \{a,b\} \\ \{c,d\} & \{b,c\} & \varnothing \\ \{a,d\} & \varnothing & \{a,d\} \end{array}\right[$$

Четыре подруги (Анна (a), Белла (b), Светлана (c) и Дина (d)) имеют следующие особенности: Анна и Белла – блондинки, Светлана предпочитает короткую стрижку, Анна и Дина носят туфли на высоких каблуках, Анна, Белла и Светлана работают в фирме D. В зависимости от внешности и статуса, подруги предпочитают покупать одежду в разных торговых фирмах (назовем их K, L и M). Эти зависимости выражаются следующими условиями:

1) если не блондинки $\{c, d\}$ отдают предпочтение фирме K, то девушка с короткой стрижкой $\{c\}$ предпочитает фирму M;

2) если девушки с длинными волосами $\{a, b, d\}$ предпочитают фирму K, то девушка, не работающая в фирме D $\{d\}$, покупает одежду в фирме L, а блондинки $\{a, b\}$ – в фирме M;

3) если девушки, носящие туфли на высоких каблуках $\{a, d\}$, отдают предпочтение фирме L, то не блондинки $\{c, d\}$ покупают одежду в фирме K;

4) если девушки, не носящие туфель на высоких каблуках $\{b, c\}$, покупают одежду в фирме K, то, девушки на туфлях с высокими каблуками $\{a, d\}$ предпочитают магазины фирмы M.

Необходимо проверить совместимость этих условий.

Может быть, кому-то из вас удастся подобрать более удачный пример!

Интерпретация логического вывода

Решение задачи с использованием алгоритма преобразования D-системы в C-систему и ортогонализации

$$P[KLM] = \left]\begin{matrix} A & \varnothing & B \\ B & \overline{D} & \varnothing \\ B & \varnothing & A \\ \overline{A} & \overline{C} & \varnothing \\ C & \varnothing & C \end{matrix}\right[= \left]\begin{matrix} \{a,b\} & \varnothing & \{c\} \\ \{c\} & \{d\} & \varnothing \\ \{c\} & \varnothing & \{a,b\} \\ \{c,d\} & \{b,c\} & \varnothing \\ \{a,d\} & \varnothing & \{a,d\} \end{matrix}\right[.$$

Обозначим D-кортежи с номером i в D-системе $P[KLM]$ как P_i. Приступим к вычислениям, используя Теоремы 2, 3, 8, 2.20 и 3.1.

$$P_1 \cap P_2 = \begin{bmatrix} \{a,b\} & * & * \\ \{c,d\} & * & \{c\} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} \{c\} & * & * \\ \{a,b,d\} & \{d\} & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{a,b\} & \{d\} & * \\ \{c\} & * & \{c\} \\ \{d\} & \{d\} & \{c\} \end{bmatrix}.$$

$$P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \begin{bmatrix} \{a,b\} & \{d\} & * \\ \{c\} & * & \{c\} \\ \{d\} & \{d\} & \{c\} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} \{c\} & * & * \\ \{a,b,d\} & * & \{a,b\} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \{a,b\} & \{d\} & \{a,b\} \\ \{c\} & * & \{c\} \end{bmatrix}.$$

$$P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4 = \begin{bmatrix} \{a,b\} & \{d\} & \{a,b\} \\ \{c\} & * & \{c\} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} \{c,d\} & * & * \\ \{a,b\} & \{b,c\} & * \end{bmatrix} =$$

$$= [\{c\} \quad * \quad \{c\}].$$

$$P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4 \cap P_5 = [\{c\} \quad * \quad \{c\}] \cap \begin{bmatrix} \{a,d\} & * & * \\ \{b,c\} & * & \{a,d\} \end{bmatrix} = \varnothing\,.$$

Отсюда следует, что условия задачи невыполнимы.

Интерпретация логического вывода

Соотношение между +*Atr* и правилом вывода *Gen*

(из $\mathcal{B}$ следует $(\forall x)\mathcal{B}$**).**

В АК фиктивный атрибут X добавляется в АК-объект при условии, что X отсутствует в его схеме отношения.

Это означает, что в формуле $\mathcal{B}$ нет свободной переменной x.

В исчислении предикатов при интерпретации формулы $(\forall x)\mathcal{B}$ возможны две разные ситуации.

Первая – когда в формуле $\mathcal{B}$ нет свободной переменной x. Тогда интерпретацией формулы $(\forall x)\mathcal{B}$ является добавление фиктивного атрибута X к интерпретации формулы $\mathcal{B}$, т.е. $(\forall x)\mathcal{B}$ ***соответствует операции*** *+Atr*.

Вторая я – когда $\mathcal{B}$ содержит свободную переменную x. Пусть $B[\mathbf{W}]$ – интерпретация $\mathcal{B}$ и X содержится в **W**. В проекции $Pr_{W\setminus X}(B)$ каждому элементарному кортежу соответствует некоторое множество значений атрибута X в $B[\mathbf{W}]$. Здесь возможны **три ситуации**.

- Если в проекции $Pr_{W\setminus X}(B)$ существуют элементарные кортежи (например, $t_i, t_j, \ldots, t_k$), которым соответствуют все элементы домена атрибута X в $B[\mathbf{W}]$, то $\{t_i, t_j, \ldots, t_k\}$ – ***интерпретация формулы*** $(\forall x_i)\mathcal{B}$.
- Если $\{t_i, t_j, \ldots, t_k\} = \varnothing$, то $(\forall x)\mathcal{B}$ – ***противоречие***.
- Если всем элементарным кортежам из $Pr_{W\setminus X}(B)$ соответствуют домены атрибута X, то X – ***фиктивный атрибут*** в $B[\mathbf{W}]$ и $B[\mathbf{W}]$ – ***интерпретация формулы*** $(\forall x_i)\mathcal{B}$.

Интерпретация логического вывода

Соотношение между +*Atr* и правилом вывода *Gen*

(из $\mathcal{B}$ следует $(\forall x)\mathcal{B}$**).**

Из предыдущего следует, что в правило ***Gen*** в формулировке из [Мендельсон, 2015] необходимо добавить следующее условие:

«при условии, что переменная x не свободна в $\mathcal{B}$ или, если она свободна в $\mathcal{B}$, то она соответствует фиктивному атрибуту в интерпретации $\mathcal{B}$».

Известен другой вариант правила обобщения – правило Бернайса [Клини, 1973], которое не требует корректировки:

Правило Бернайса*:*

Из $C \supset A(x)$ ***выводимо*** $C \supset (\forall x)A(x)$

при условии, что переменная x входит свободно в $A(x)$

и не входит свободно в C.

Данное условие обязательно входит в правило Бернайса.

Непонятно, почему Мендельсон во всех изданиях не добавлял никаких условий в формулировку правила вывода Gen. Из текста ясно, что $\mathcal{B}$ – всего лишь правильно построенная формула.

В аксиоме (А5) есть ограничение «при условии, что x не входит свободно в $\mathcal{B}$». Но почему этого ограничения нет в правиле вывода Gen?

Может быть, оно подразумевается?

Интерпретация логического вывода

Некорректность правила подстановки

Еще один источник ошибок в логическом выводе на основе исчисления предикатов – это отсутствие понятия, аналогичного «***схеме отношения***».

Так, в ***алгоритме унификации*** допускается замена переменных в подстановках [Чень, Ли, 1983]. Для интерпретаций предикатов и формул (АК-объектов) это означает замену атрибута в схеме отношения и, соответственно, переход в другое пространство даже в том случае, если домены этих атрибутов одинаковы.

Например, АК-объект $P[XY]$ при пересечении с самим собой не изменяется, но если в нем заменить имена атрибутов, например, $P[YZ]$, то обобщенное пересечение $P[XY] \cap_G P[YZ]$ означает ***операцию соединения*** отношений.

Другой пример: интерпретация формулы $A(x) \wedge B(x)$ – это пересечение интерпретаций одноместных предикатов $A(x)$ и $B(x)$, в то время как интерпретацией формулы $A(x) \wedge B(y)$ оказывается декартово произведение интерпретаций предикатов $A(x)$ и $B(y)$.

Таким образом, интерпретации формул при переименовании переменных существенно изменяются, что в некоторых случаях не принимается во внимание при замене переменных в алгоритме унификации.

Содержание доклада

Нерешенные проблемы

1. Задача Steamroller (№ 47 в [Pelletier, 1986]), которая выражается на языке исчисления предикатов, является иллюстрацией сложности логического вывода. Предполагается, что ее формулировка на языке АК позволит упростить ее решение. Однако до настоящего времени такая формулировка не найдена. Также отсутствует обоснование того, что этого нельзя сделать.

2. Не рассмотрена интерпретация и область ее применения для функциональных символов.

3. Не исследована возможность замены универсума Эрбрана [Чень, Ли, 1983] более простым вариантом на основе алгебры кортежей.

4. Не исследована возможность интерпретации теоремы Геделя о неполноте.

Список можно продолжить.

Позитивные результаты интерпретации

1. Исследования показали, что, помимо логического анализа, алгебру кортежей можно использовать в следующих областях дискретной математики и информационных технологий:

- реляционные модели;
- графы и сети;
- системы искусственного интеллекта (экспертные системы, семантические сети, фреймы, онтологии);
- логико-вероятностные методы, включая вероятностную логику;
- дискретные автоматы;
- задачи удовлетворения ограничений (Constraint Satisfaction Problem – CSP);
- модели вопросно-ответных систем;
- задачи кластеризации;
- при машинной реализации – сокращение трудоемкости алгоритмов решения сложных задач логического анализа за счет специфических свойств АК, а также за счет возможности эффективного распараллеливания алгоритмов

[Кулик и др., 2010; Кулик, 2020; Kulik, Fridman, 2022].

Позитивные результаты интерпретации

2. С помощью средств математической логики трудно, а иногда просто невозможно применять многие необходимые в естественных рассуждениях методы ***логического анализа***, такие как:

- формулирование и проверка гипотез,
- анализ неопределенностей,
- распознавание и анализ ошибок и некорректностей в рассуждениях,
- вывод абдуктивных заключений,
- анализ пресуппозиций, методы элиминации аномалии противоречия в базах знаний,
- вывод следствий с заранее заданными свойствами.

В то же время эти задачи решаются с помощью алгебры кортежей [Кулик и др., 2010; Кулик, 2019; Кулик, 2020; Кулик, 2021; Kulik, Fridman, 2022].

Список использованной литературы

1. *Бочаров, В. А., Маркин В.И.* Введение в логику. М. : Форум ; ИНФРЛ-М, 2008.
2. *Бурбаки Н*. Теория множеств. Книга 1. Основные структуры анализа. М.: Мир, 1965.
3. *Вагин, В. Н. и др*. Достоверный и правдоподобный вывод в интеллектуальных системах / под ред. В. Н. Вагина, Д. А. Поспелова. - 2-е изд. испр. и доп. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. - 712 с.
4. *Гетманова А.Д.* Учебник логики. 8- изд., перераб. М.: КНОРУС, 2011.
5. *Клини С. К.* Математическая логика. М.: Мир, 1973.
6. *Кулик Б.А.* Новые классы КНФ, с полиномиально распознаваемым свойством выполнимости // Автоматика и телемеханика. 1995. № 2. С. 111-124.
7. *Кулик Б.А*. Логика естественных рассуждений. СПб,: Невский диалект, 2001.
8. *Кулик, Б. А.* Логический анализ систем на основе алгебраического подхода. Диссертация на соискание ученой степени
9. *Кулик Б.А., Зуенко А.А., Фридман А.Я.* Алгебраический подход к интеллектуальной обработке данных и знаний. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010.
10. *Кулик Б.А.* Исследование противоречий в естественных рассуждениях на примерах метафор и пресуппозиций // Труды Семнадцатой Национальной конференции по искусственному интеллекту с международным участием. КИИ-2019 (21–25 октября 2019 г., г. Ульяновск, Россия). Ульяновск: УлГТУ, 2019. Т. 2. С. 192-200.
11. *Кулик Б.А.* Вывод следствий с предварительно заданными свойствами // Системный анализ в проектировании и управлении. В 3 ч. Ч.2: сб. научных трудов XXV Международной научной и учебно-практической конференции, 13-14 октября 2021 г. – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2021. Часть 2. С. 89-97.

Список использованной литературы

12. *Кулик Б.А.* Логика и математика: просто о сложных методах логического анализа. СПб.: Политехника, 2020.
13. *Курант Р., Роббинс Г*. Что такое математика? 3-е изд., испр. и доп. М.: МЦНМО, 2001.
14. *Поспелов Д. А.* Моделирование рассуждений. Опыт анализа мыслительных актов. М.: Радио и связь, 1989.
15. *Пуанкаре А.* О науке. М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 736 с.
16. *Справочная книга* по математической логике: В 4-х частях / Под ред. Дж. Барвайса. Ч. 2. Теория множеств: Пер. с англ. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 370 с.
17. *Стяжкин Н. И.* Формирование математической логики. М.: Наука, 1967.
18. *Чень Ч., Ли Р.* Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. – М., Наука. 1983.
19. *Эйлер Л.* Письма к немецкой принцессе о разных физических и философских материях. СПб.: Наука, 2002.
20. *Copi, I. M., Cohen, C. and McMahon, K*. Introduction to Logic. London: Routledge, 2016.
21. *Kulik B., Fridman A.* Complicated Methods of Logical Analysis Based on Simple Mathematics. Cambridge Scholars Publishing, 2022.
22. *Mendelson, E.* Introduction to Mathematical Logic. Boca Raton, London, New York: Taylor & Francis Group, 2015 (6th ed.). 499 pp.
23. *Pelletier, F.J.* Seventy-Five Problems for Testing Automatic Theorem Provers // Journal of Automated Reasoning, 1986, Vol. 2, pp. 191-216.

Спасибо за внимание!