

# **С чем идет современная логика в XXI век?**

**Б.А. Кулик**

Словами можно доказать и опровергнуть все, что угодно, и скоро люди усовершенствуют язык до такой степени, что будут доказывать математически верно, что дважды два - семь.

А.П. Чехов, "Огни"

## **1. А нужна ли нам логика?**

Недавно мне предложили прочесть небольшой курс лекций по логике для старшекурсников одного гуманитарного университета. На первой лекции я задал студентам такой вопрос:

- Скажите, отличаются ли друг от друга по смыслу два утверждения: "Все гениальное просто" и "Все простое гениально"?

Ответом мне было продолжительное молчание. Наконец кто-то робко произнес:

- Кажется, они отличаются.

Этот же вопрос я задавал не только студентам, но и тем, кто давно уже вышел из студенческого возраста (среди них были специалисты по информатике и профессиональному интеллекту, некоторые из них имели профессорские звания). Однозначные ответы встречались редко. Отвечали, как правило, многословно и не по существу. Некоторые из отвечающих говорили, что данный вопрос имеет отношение к силлогистике и добавляли при этом, что эта логическая система сейчас, по-видимому, устарела.

Любой выпускник старой русской гимназии, в которой логика была обязательным предметом, ответил бы на этот вопрос не задумываясь. В классической логике существенная разница между суждениями "Все A есть B" и "Все B есть A" не подлежит никакому сомнению. Самое интересное, что для англичанина или немца, даже не знающих классическую логику, этот вопрос тоже не вызвал бы особых затруднений - во многих европейских языках сама синтаксическая структура предложения не позволяет отождествлять такие "перевертяши". Для языков же славянской группы и некоторых других языков (например, арабского), в которых порядок слов в предложении менее строго регламентирован и допускается пропуск глагола-связки "есть" (оказывается, что это не просто связка, а, как мы увидим далее, насыщенное глубоким смыслом логическое понятие), подобные "перевертяши" грамматически (а порой и по смыслу) трудно различимы и поэтому при некотором навыке их можно использовать для того, чтобы "доказать" собеседнику явную нелепость. И, видимо, тот факт, что в России как нигде вольготно чувствуют себя демагоги и мистификаторы, обусловлен неблагоприятным стечением двух обстоятельств: 1) особенностями русского языка и 2) явным пробелом в логическом образовании населения России.

Использование "перевертышей" (или, точнее, обращенных суждений) не так безобидно, как это кажется на первый взгляд. Математикам хорошо известно, что во многих случаях "обращение" теоремы приводит к ложному утверждению. Примером такого рода является следующая теорема из школьной математики: "Если четырехугольник ромб, то его диагонали перпендикулярны" Обратное ему утверждение "Если диагонали четырехугольника перпендикулярны, то он является ромбом" оказывается истинным лишь в частных случаях. В рамках традиционной логики нетрудно построить сравнительно простые системы суждений, в которых подстановка одного из "перевертышей" приводит к неразрешимому парадоксу, в то время как подстановка в исходное рассуждение его "обращения" не вызывает никаких коллизий.

Разумеется, "перевертыши" далеко не единственный класс целенаправленных уловок или непроизвольных ошибок в рассуждении. Существует немало других логических аномалий, которые не зависят от синтаксического строя национального языка и могут распознаваться лишь при определенных навыках и знаниях по логике. В какой-то степени восполняет этот пробел в образовании математика. Но даже в ней многие элементарные приемы анализа рассуждений недостаточно четко сформулированы. К тому же в современной математике с некоторых пор появились некоторые не совсем корректные с точки зрения естественной логики приемы рассуждений, которые частично проникли и в школьное образование (более подробно об этом будет сказано ниже). А тем из учащихся, которые имеют склонность к гуманитарным знаниям и явно не в ладах с чрезмерно формализованной современной математикой, остается только надеяться на интуицию. Но с помощью интуиции далеко не всегда можно правильно оценить даже сравнительно простое рассуждение, особенно в тех случаях, когда логическая культура индивида, даже при наличии высокой образованности, находится в первобытном состоянии.

Наверное, невозможно найти человека, который никогда не допускал бы в своих рассуждениях логических ошибок. И было время, когда анализ логических ошибок в рассуждениях оппонентов играл немалую роль в науке и образовании. Но в XX столетии эта роль заметно потускнела. Логика замкнулась в себе и перестала быть понятной для многих. И можно лишь догадываться о том, кто выиграл от того, что в России логика надолго исчезла из списка общеобразовательных предметов. Но проигравших, как мне думается, намного больше.

## **2. Какая философская парадигма лежит в основе современной логики?**

Самое неприятное и поразительное заключается в том, из этого "первобытного состояния" до сих пор не вышла основа основ наших точных знаний - современная математика. И чтобы обосновать этот тезис, мне пришлось включить в эту статью "занудный" терминологический анализ некоторых основополагающих понятий математики и логики. Но об этом речь пойдет в следующем разделе. Пока же рассмотрим некоторые философские проблемы, имеющие непосредственное отношение к логике.

Логика - не только сугубо математическая, но также и философская наука. В XX веке эти две взаимосвязанные ипостаси логики оказались разведенными в разные стороны. С одной стороны логика понимается как единая наука о законах правильного мышления, а с другой - она с точки зрения современного чрезмерно формализованного формального подхода представлена в виде совокупности слабо связанных друг с другом искусственных языков, которые называются формальными логическими системами. К концу XX столетия проблема связи логики и мышления оказалась на задворках науки, и это обстоятельство стало одной из главных причин потери интереса общества к логике. Логика постепенно превратилась в рыхлую совокупность замкнутых и самодостаточных языков для переписки между специалистами. Но в каждом исследовании, посвященном логике, явно или неявно присутствует одна фундаментальная проблема, а именно, проблема соотношения логики и естественного языка. Рассмотрим вкратце некоторые аспекты этой проблемы.

Из громадного многообразия созданных человеком систем разговорный (или естественный) язык является одной из самых сложных и загадочных. С началом расширения и развития языка многие ученые связывают начало выделения *homo sapiens* из мира остальных живых существ Земли. Мы в своей повседневной деятельности привыкли рассматривать разговорный язык в основном как средство общения и пользуемся им, порой не задумываясь о тех скрытых или неявно выраженных интеллектуальных ресурсах, которые в нем заложены. Тесная связь между языком и мышлением понимается многими людьми, не связанными профессионально с философией или лингвистикой, весьма поверхностно. Для многих очевидно, что мышление - это некий сложный процесс, с помощью которого решаются житейские, научные или философские проблемы и рождаются гениальные идеи

или роковые заблуждения. Язык же понимается многими просто как средство, с помощью которого результаты мышления можно передать современникам или оставить потомкам.

Но, связав в своем сознании мышление с понятием "процесс", а язык с понятием "средство", мы по сути перестаем замечать тот непреложный факт, что в данном случае "средство" не подчинено полностью "процессу", а в зависимости от нашего целенаправленного или неосознанного выбора тех или иных словесных штампов оказывает сильнейшее влияние на ход и результат самого "процесса". Причем известно немало случаев, когда такое "обратное влияние" оказывается не только тормозом для правильного мышления, но порою даже его разрушителем. Достаточно много примеров таких разрушительных словесных штампов (мемов) из области биостатистики приведено в статье В.П. Леонова [1]. Кстати, из этой статьи читатель может узнать много интересного о новом интенсивно развивающемся направлении в методологии науки - меметике, в которой исследуются закономерности возникновения, распространения и "умирания" мемов. Некоторые из таких ныне живущих мемов, но уже из области знаний, связанных с логикой, мы рассмотрим в данной статье.

В философии, логике и языкоznании известно немало различных теорий и подходов, объясняющих проблему соотношения языка и мышления. Однозначного решения этой проблемы пока что нет, но для многих очевидно, что мышление хотя и включает язык, но по содержанию богаче языка. Однако в истории философии был период, когда в сознании многих исследователей связь между ними определялась тезисом: "Язык - это примерно то же самое, что и мышление". Датируется этот период первой половиной нашего столетия, когда среди философов и ученых большой популярностью пользовались различные течения логического позитивизма и лингвистической (или аналитической) философии. Основоположники этого направления, всемирно известные математики и философы (Г. Кантор, Б. Рассел, А.Н. Уайтхед, Л. Витгенштейн, Д. Гильберт, Дж. Пеано, Е. Цермело и др.), считали, что естественный язык содержит в себе много неоднозначностей и в силу этого он не приспособлен для правильного логичного мышления. Свою задачу они видели в том, чтобы создать новый искусственный язык, с помощью которого можно было бы преодолеть многие "недостатки" естественного языка.

В математике главным идеологом этого направления стал выдающийся немецкий математик Давид Гильберт, предложивший в начале XX столетия свою программу обоснования этой науки, в которой конкретные "интуитивные" математические понятия (числа, точки, линии, фигуры, множества и т.д.) заменялись некоторыми абстрактными символами, связанными друг с другом чисто формальными отношениями.

Для многих математиков того времени такой переход не представлялся достаточно обоснованным (их точку зрения выразил А. Пуанкаре в своих работах по методологии науки [2]). Но к концу XX столетия точка зрения Гильberta оказалась доминирующей в некоторых разделах математики, в первую очередь в универсальной алгебре и в математической логике. Во многом эта точка зрения совпала с основной парадигмой логического позитивизма. В то же время у некоторых современных математиков отношение к программе Гильберта явно негативное. Академик В.И. Арнольд в статье под названием "Выживет ли современная математика?" назвал формализованный аксиоматический метод, развившийся в русле программы Д. Гильберта, "самоубийственным демократическим принципом" [3]. Анализ негативных тенденций, обусловленных чрезмерной формализацией математики, содержится во многих публикациях. Достаточно подробная информация на эту тему приведена в [4,5].

С философской точки зрения задача, поставленная в рамках логического позитивизма, так и не была выполнена. В частности, в своих поздних исследованиях один из основоположников этого направления Людвиг Витгенштейн пришел к выводу, что естественный язык нельзя реформировать в соответствии с разработанной позитивистами программой. Даже язык математики в целом устоял перед мощным напором "логицизма",

хотя многие термины и структуры предлагаемого позитивистами языка вошли в некоторые разделы дискретной математики и существенно дополнили их. Популярность логического позитивизма как философского направления во второй половине XX столетия заметно упала - многие философы пришли к выводу, что отказ от многих "нелогичностей" естественного языка, попытка втиснуть его в рамки основополагающих принципов логического позитивизма влечет за собой дегуманизацию процесса познания, а вместе с этим и дегуманизацию человеческой культуры в целом. Косвенно этот тезис приняли и некоторые главные идеологи позитивизма. Например, известный философ и логик Г. Рейхенбах разделил процесс познания на "контекст открытия" и "контекст подтверждения" и предложил ограничить сферу методологии науки только "контекстом подтверждения" [6]. Тем самым он как бы признал, что продуктивная, творческая составляющая процесса познания, содержащаяся в "контексте открытия", выпала из поля зрения методологии позитивизма.

Стоит отметить, что современная философия ударила в другую крайность. Неприятие основной философской установки логического позитивизма обернулось практически полным отказом от всякой логики. Особенно ярко такая негативная установка проявляется в модной сейчас философии постмодерна.

В то же время логический позитивизм оставил ощутимый след в современной науке: заметно повысился интерес к логической интерпретации языка, были открыты или уточнены логические системы, которые легли в основу современной компьютерной революции. Заодно среди тех, кто так или иначе соприкасается с проблемой соотношения языка и мышления, окрепло убеждение, что понять суть человеческого мышления невозможно, если не понять сущи логических методов анализа человеческих рассуждений и аргументов, выраженных на естественном языке. Математическая логика вошла в современную лингвистику и прочно закрепилась в ней.

Однако в самой математической логике пока что нет полной ясности. На ее основе реализована техническая и математическая база современных компьютеров, но в то же время моделирование и анализ естественных рассуждений на ее языке сопровождается большими трудностями и проблемами. Многие методы рассуждений, которые используются в естественном языке, часто весьма трудно однозначно отобразить на языке математической логики. В некоторых случаях такое отображение приводит к существенному искажению сущи естественного рассуждения. И есть основание полагать, что эти проблемы являются следствием исходной методологической установки аналитической философии и позитивизма о нелогичности естественного языка и о необходимости его коренного реформирования.

Сама исходная методологическая установка позитивизма также не выдерживает критики. Обвинять разговорный язык в нелогичности просто абсурдно. На самом деле нелогичность характеризует не сам язык, а многих пользователей этого языка, которые просто не знают или не хотят использовать логику и компенсируют этот изъян психологическими или риторическими приемами воздействия на публику, либо в своих рассуждениях используют в качестве логики систему, которая называется логикой лишь по недоразумению. В то же время имеется немало людей, речь которых отличается ясностью и логичностью, и эти качества не определяются знанием или незнанием основ математической логики.

### **3. Неестественная логика в основаниях математики**

Настораживает еще одно обстоятельство, которое имеет непосредственное отношение к основным проблемам современной логики. В рассуждениях тех, кого можно отнести к законодателям или последователям формального языка математической логики, нередко обнаруживается своеобразная "слепота" по отношению к элементарным логическим ошибкам. На эту слепоту в основополагающих работах Г. Кантора, Д. Гильберта, Б. Рассела, Дж. Пеано и др. еще в начале нашего столетия обратил внимание один из великих

математиков Анри Пуанкаре [2]. Эта проблема не потеряла своего значения и в наше время - А.А. Зенкин в ряде недавних публикаций [7,8] обосновал несостоятельность некоторых методов доказательств, используемых при выводе основополагающих теорем Канторовой теории множеств. Заметим, что некоторые из этих методов (в частности, диагональный метод Кантора) часто используются в современных исследованиях по формальной логике.

С бесконечностью связана одна распространенная в современных теориях логического вывода тенденция, которая при внимательном рассмотрении оказывается непреодолимым препятствием для прикладной сути логики. Формальная логика оперирует сугубо дискретными сущностями (словами, символами, обозначениями объектов и операций, значками и т.д.). Ясно, что множество всех этих возможных объектов необозримо, но даже если предположить, что человечество просуществует еще (дай Бог!) миллиарды лет, то все равно множество этих объектов будет конечным множеством и вряд ли когда-нибудь приблизится к количеству элементарных частиц во Вселенной, которое по современным физическим представлениям характеризуется хотя и чрезмерно большим, но все же конечным числом. В то же время подавляющая часть современных работ по основаниям математической логики начинается с того, что в них постулируется "счетность" алфавита, что означает, что число "термов" и "атомов" может быть конечным или счетным бесконечным множеством. Если удерживаться в рамках "конечности" алфавита, то ничего абсурдного в этом нет, но дело в том, что за данным "постулатом" о счетности алфавита, скрывается, то, что некоторые открытые Кантором свойства бесконечных множеств, несовместимые со свойствами конечных множеств, переносятся на свойства многих систем логического вывода. Вполне естественно возникает вопрос: "Может ли человек, способный охватить в своем сознании лишь конечное множество слов и обозначений, воспользоваться "достижениями" такой "продвинутой" логики?"

Во многих современных работах по логике и математике, в которых заметно влияние программы Гильберта, не находят объяснения многие явно нелепые с точки зрения естественной логики утверждения. Соотношение между "элементом" и "множеством" является простейшим примером такого рода. Во многих работах этого направления утверждается, что некоторое множество (назовем его A) может быть элементом другого множества (назовем его B). Например, в широко известном руководстве по математической логике [9] мы встретим такую фразу: "Множества сами могут быть элементами множеств, так, например, множества всех множеств целых чисел имеет своими элементами множества". Заметим, что это утверждение не просто оговорка. Оно содержится в качестве "скрытой" аксиомы в формальной теории множеств, которую многие специалисты считают основанием современной математики, а также в формальной системе, которую построил математик Гедель при доказательстве своей знаменитой теоремы о неполноте формальных систем [10].

Эта теорема относится к довольно узкому классу формальных систем (в их число входит формальная теория множеств и формальная арифметика Пеано), логическая структура которых явно не соответствуют логической структуре естественных рассуждений и обоснований. Однако уже более полувека она является предметом бурного обсуждения среди логиков и философов в контексте общей теории познания. При таком широком обобщении этой теоремы получается, что принципиально непознаваемыми являются многие элементарные понятия. Но при более трезвом подходе оказывается, что теорема Геделя показала лишь несостоятельность программы формального обоснования математики, предложенной Д. Гильбертом и подхваченной многими математиками, логиками и философами. Более широкий методологический аспект теоремы Геделя вряд ли можно считать приемлемым до тех пор, пока не получен ответ на следующий вопрос: является ли программа обоснования математики, предложенная Гильбертом, единственно возможной?

Чтобы понять двусмысленность утверждения "множество A есть элемент множества B", достаточно задать простой вопрос: "Из каких элементов в этом случае сформировано

множество В?". С точки зрения естественной логики возможны лишь два исключающих друг друга варианта объяснения.

Объяснение первое. Элементами множества В являются имена некоторых множеств и, в частности, имя или обозначение множества А. Например, множество всех четных чисел содержится как элемент в множестве всех имен (или обозначений) множеств, выделенных по каким-либо признакам из множества всех целых чисел. Можно привести более понятный пример: множество всех жирафов содержится как элемент в множестве всех известных видов животных. В более широком контексте множество В можно также сформировать из концептуальных определений множеств или ссылок на множества.

Объяснение второе. Элементами множества В являются элементы некоторых других множеств и, в частности, все элементы множества А. Например, каждое четное число есть элемент множества всех целых чисел или каждый жираф есть элемент множества всех животных.

Но тогда получается, что в обоих случаях выражение "множество А является элементом множества В" не имеет смысла. В первом случае оказывается, что элементом множества В является не само по себе множество А, а его имя (или обозначение, или ссылка на него). В этом случае неявно устанавливается отношение эквивалентности между множеством и его обозначением, что неприемлемо ни с точки зрения обычного здравого смысла, ни с точки зрения несовместимой с чрезмерным формализмом математической интуиции. Во втором случае оказывается, что множество А включено в множество В, т.е. является его подмножеством, но не элементом. Здесь тоже явная подмена понятий, поскольку отношение включения множеств и отношение принадлежности (быть элементом множества) в математике имеют принципиально различный смысл. Знаменитый парадокс Рассела, подорвавший доверие логиков к понятию "множество", основан на этой нелепости - в основе парадокса лежит двусмысленная предпосылка о том, что множество может быть элементом другого множества.

В свое время (1925 г.) один из пионеров компьютерной революции Дж. фон Нейман предложил различать два типа объектов: "множества" и "классы". В его логической системе классы отличаются от множеств тем, что не могут быть элементами других классов [11, стр. 46]. Однако в своей системе он уделил основное внимание "множествам", для которых такое явно двусмысленное соотношение считается допустимым [12].

Возможен еще один вариант объяснения. Пусть множество А задано простым перечислением его элементов, например,  $A = \{a, b\}$ . Множество В в свою очередь задано перечислением некоторых множеств, например,  $B = \{\{a, b\}, \{a, c\}\}$ . В данном случае кажется очевидным, что элементом В является не имя множества А, а само множество А. Но даже в этом случае элементы множества А не являются элементами множества В, и множество А здесь рассматривается как неразделимая совокупность, которая вполне может быть заменена его именем. Но если бы мы считали элементами В все элементы содержащихся в нем множеств, то в этом случае множество В было бы равно множеству  $\{a, b, c\}$ , и множество А в этом случае было бы не элементом В, а его подмножеством. Таким образом, получается, что этот вариант объяснения в зависимости от нашего выбора, сводится к ранее перечисленным вариантам. А если никакого варианта выбора не предложено, то получается элементарная двусмысленность, которая часто приводит к "необъяснимым" парадоксам.

Можно было бы не уделять особого внимания этим терминологическим нюансам, если бы не одно обстоятельство. Оказывается, что многие парадоксы и несообразности современной логики и дискретной математики являются прямым следствием или подражанием этой двусмысленности. Например, в современных математических рассуждениях часто используется понятие "самоприменимость", которое лежит в основе парадокса Рассела. В формулировке этого парадокса под самоприменимостью подразумевается существование множеств, которые являются элементами самих себя. Такое

утверждение сразу же приводит к парадоксу. Если мы рассмотрим множество всех "несамоприменимых" множеств, то окажется, что оно является одновременно "самоприменимым" и "несамоприменимым". От противоречия легко избавиться, если отказаться от утверждения, что множество (но не его имя, обозначение или определение) может быть элементом какого-то множества. И в соответствии с этим выражение "множество есть элемент множества" рассматривать как неудачную метафору для одного (и только одного!) из сформулированных выше вариантов объяснения.

Нашли горячие головы, которые из противоречивости парадокса Рассела пришли к выводу о необходимости запрета любых "самоприменимых" конструкций. Такое же мнение в свое время высказал и сам Рассел. Но оказывается в математике вполне возможны и даже необходимы "самоприменимости" в другом смысле, которые не влекут "неразрешимых" парадоксов. Элементарным примером является "самоприменимость" отношения включения множеств: в аксиомах алгебры множеств предусматривается, что любое множество включено в самого себя. Но здесь множество содержитя в себе не как элемент, а как множество (точнее, как "нестрогое подмножество"). Однако при этом никакого парадокса не возникает, так как "несамоприменимых" в этом смысле множеств просто не существует и для "самоприменимости" нет альтернативы.

Другим примером "самоприменимости" является структуры списков, которые часто используются в современном программировании и в системах искусственного интеллекта. Грубо говоря, списки - это некоторые структуры, связанные друг с другом системой ссылок. С помощью этих ссылок можно "путешествовать", переходя от одной структуры к другой. Для списков вполне допустима (а во многих системах искусственного интеллекта даже необходима) ситуация, когда в системе ссылок одного списка встречается ссылка на тот же самый список или ссылка из списка нижнего уровня на головной список. Здесь просто необходимо знать о существовании такой необычной "самоприменимой" ссылки, чтобы не хвататься за голову в ситуации, когда программа обработки списков при определенных условиях (порой из-за небрежности программиста) входит в бесконечный цикл.

Можно отнести к категории "самоприменимых" также некоторые рекурсивные функции и процедуры. Например, известный из школьной математики факториал

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

можно определить как рекурсивную функцию F с помощью двух равенств:

$$F(1) = 1; F(n+1) = (n+1)F(n).$$

Такое определение не совсем привычно для человека, несведущего в математике, но является вполне корректным и во многих случаях даже полезным не только для теории, но и для практики. Необычность его заключается в том, что одна и та же функция F здесь используется в левой и в правой части второго равенства. Но "самоприменимость" здесь можно рассматривать как метафору, поскольку в разных частях равенства эта функция используется с разными значениями аргумента. К тому же в записи рекурсивной функции равенство (=) означает не отношение, а известную программистам операцию присваивания. Примером такого "равенства" является кажущаяся абсурдной запись "X=X+1", которая означает, что значение X в результате операции присваивания увеличивается на единицу.

Однако эти и многие другие примеры "самоприменимости" не имеют ничего общего с "самоприменимостью" по Расселу, в которой "множество" без всякого пояснения становится "элементом". "Множество" как целое - это первичное свойство некоторых "элементов". Мы можем даже не знать других свойств выделенного множества. Но раз понятие "множество" используется как свойство, то отождествление его с сущностями ("элементами"), характеризующимися этим свойством, сразу же приводит к двусмысленности.

К сожалению, такая терминологическая чехарда в современных теоретических рассуждениях по основаниям математики и математической логики встречается весьма часто. Еще в начале нашего века А. Пуанкаре отметил, что в чрезмерной формализации математики, которой увлеклись многие приверженцы научной школы Д. Гильберта, часто содержатся "скрытые" определения и двусмыслиности [2]. Тогда они лишь намечались и можно только восхищаться прозорливости Пуанкаре. Но сейчас они проявились в полной мере, и свидетельствуют о "скрытой диверсии" в логике и в основаниях математики. Вместе с тем, если такая "диверсия" допускается для основополагающих понятий математики, то она оказывается объектом для подражания применительно ко многим частным логическим и математическим понятиям. И подобные "диверсии" (или мемы) размножаются в разных областях знаний, если не в геометрической, то, по крайней мере, в арифметической прогрессии.

Одним из разрушительных последствий указанной "диверсии" стала все возрастающая неустойчивость многих математических понятий - многие исторически сложившиеся и строго определенные математические термины коренным образом меняют свое значение в зависимости от приверженности к определенной научной школе. И это относится не только к сугубо специальным терминам, но и к таким, которые лежат в основе современной математики. Вот лишь некоторые из них: "отношение", "соответствие", "отображение", "декартово произведение множеств", "алгебраическая система". Речь в данном случае идет не просто о разных подходах к определению этих терминов, а о том, что в разных авторитетных источниках этим терминам соответствуют принципиально различные математические структуры. Поневоле напрашивается вывод, что интенсивная дифференциация математики обусловлена в основном не детализацией и расширением ее разделов, а искусственно создаваемыми терминологическими барьерами между различными научными школами.

Сейчас в рамках искусственного интеллекта идет интенсивная компьютеризация знаний, которая к тому же сопровождается многочисленными рекламными заверениями в том, что компьютерная логика более точна, чем наша обычная человеческая логика. Но если в компьютер заложить ложные или противоречивые знания и не сформулировать точных условий ложности или противоречивости, то компьютер вряд ли распознает эту ошибку. Например, в арифметических операциях компьютер не делит число на нуль не потому, что он знает, что такое деление некорректно, а потому, что в его арифметико-логическом блоке встроена инструкция, запрещающая такое деление. Чтобы смоделировать на компьютере двусмысленную ситуацию с отношением принадлежности, достаточно ввести в его память два класса объектов: "множество" и "элементы" и сформировать из них структуру (матрицу), в которой задано отношение между этими объектами. С точки зрения "логики" самого компьютера совершено неважно, содержит ли эта матрица направленные связи только между парами типа "элемент - множество" или же в эту матрицу добавлены некоторые связи между парами типа "множество - множество". Ведь структурные свойства отношения принадлежности компьютеру не заданы, поскольку эти свойства пока что не определили однозначно и точно сами люди.

#### **4. Проблемы, связанные с математическим подходом к анализу рассуждений**

Можно предложить достаточно простой выход из обрисованного данного затянувшегося кризиса: в основу логики классов (или множеств) нужно заложить не отношение принадлежности, а отношение включения, основные структурные свойства которого в настоящее время хорошо исследованы и однозначно определены в математике. Однако такой подход почему-то не привлек внимания современных логиков и начал исследоваться лишь несколько лет назад автором данной статьи [13-21]. Разумеется, использование отношения включения при моделировании и анализе естественных

рассуждений отнюдь не означает, что отношение принадлежности должно быть изъято из математики. Но это отношение нуждается в более строгом определении. В соответствии с программой Гильберта отношение принадлежности относится к "первичным" (т.е. неопределяемым) понятиям. Но за этой "первичностью" следует ряд общепринятых формальных построений, из которых следует, что данное отношение уже "скрыто" определено специалистами по основаниям математики достаточно четко как двусмысленное понятие.

Еще одной трудной проблемой, связанной с моделированием и анализом естественных рассуждений, является ответ на вопрос: возможно ли в принципе математическое обоснование логики естественных рассуждений? На первый взгляд, эта проблема кажется неразрешимой. Принято считать, что математика оперирует понятиями и символами, которые имеют строгое определение и смысл которых является фиксированным, по крайней мере, в рамках какого-то определенного раздела математики. В настоящее время можно найти немало конкретных публикаций по математике и логике, где это правило нарушается. Во многом это обусловлено упомянутой выше "логической диверсией", внедрившейся в математику в начале XX века. Но в целом это правило все же является эталоном математики. В то же время в естественном языке нередко одни и те же слова или сочетания слов даже в разных местах одного и того же краткого текста могут иметь разный, а иногда и существенно несопоставимый смысл. В естественном языке вполне уместны и даже неизбежны такие "нелогические" явления как омонимия, полисемия, тропы, метафоры и т.д., которые принято объединять термином "полиморфизм языка". Как же в этом случае можно для логического анализа рассуждений на естественном языке использовать математику с ее прямолинейностью и однозначностью?

Однако при такой постановке проблемы смешиваются два принципиально разных понятия: язык "вообще" с его неизбежным "полиморфизмом" и сравнительно короткие отрезки текстов, которые по некоторым признакам можно отнести к классу рассуждений и обоснований. Если мы в своих поисках математической основы логики ограничиваемся только рассуждениями и обоснованиями, то тем самым существенно упрощаем задачу. Можно допустить, что основные (структурообразующие) термины в рассуждении могут использоваться в самых необычных значениях (общепринятые значения, разумеется, тоже не противопоказаны), но в пределах рассуждения они не должны быть "полиморфными". В противном случае такой речевой акт (или текст) может быть чем угодно в пределах шкалы "образец бессмыслицы - литературный шедевр", но только не рассуждением. Тогда "проклятие полиморфизма" языка если даже не снимается полностью, то, по крайней мере, существенно ослабляется. И при этом с точки зрения логики совершенно неважно, о чем это рассуждение: о законах природы или языка, о перспективах победы на выборах какой-либо политической партии, о "проколах" в существующем законодательстве или о преимуществах бисквитного торта по сравнению с манной кашей.

Кроме того, оказывается, что проблема несовместимости языка математической логики с естественным языком не является единственной проблемой, препятствующей поиску приемлемой математической системы для моделирования и анализа естественных рассуждений. Многие исследователи по логике заметили, что в естественных рассуждениях могут успешно применяться методы и приемы, которые кажутся вполне обоснованными, но в то же время несовместимы с аксиомами математической логики. Примерами таких методов и приемов являются ситуации, когда какое-то конкретное формально правильное рассуждение можно опровергнуть с помощью некоторых не вызывающих сомнения аргументов. В этом случае исходное рассуждение либо опровергается полностью, либо модифицируется за счет изменения некоторых исходных положений. Примерно по такой схеме происходит сложный и мучительный процесс развития человеческого познания, но для современной математической логики сама постановка задач моделирования и анализа таких

"модифицируемых" рассуждений плохо совместима с ее методами и исходными предпосылками.

Другим примером несовместимости математической и естественной логики является допустимая в естественном языке многовариантность отрицаний. Например, дано утверждение "Тигры - травоядные млекопитающие". С точки зрения математической логики отрицанием его должно быть единственное утверждение, которое на естественном языке формулируется как "Неверно, что тигры - травоядные млекопитающие". В то же время с точки зрения естественной логики можно сформулировать более конкретные альтернативные утверждения, например: "Тигры не травоядные", "Тигры не млекопитающие" и т.д. (заметим, что отрицание, также как и исходное утверждение, не обязательно должно быть истинным). При этом у многих непосвященных в язык математической логики наверняка вызовет удивление (и, возможно, даже недоумение) следующее обстоятельство: если перевести исходное утверждение о тиграх и любое из приведенных выше альтернативных утверждений на язык математической логики и соединить эти утверждения в одну систему исходных посылок, то окажется, что такое совмещение в рамках математической логики не является противоречивым.

Эти и многие другие несоответствия между математической логикой и естественными рассуждениями стали для многих логиков в разных странах мощным стимулом к поиску альтернативных формальных логических систем. Появилось большое число новых "неклассических" логик (модальная, многозначная, немонотонная, паранепротиворечивая, логика умолчаний, логика веры, нечеткая логика и т.д.). По самым скромным подсчетам в настоящее время насчитывается не менее сотни вариантов различных "неклассических" логик. От "классических" логик эти логики отличаются тем, что в них не соблюдаются некоторые из законов булевой алгебры, которая лежит в основе математической логики, а также в основе логики, которая считалась классической до изобретения математической логики. Среди законов булевой алгебры, которые стали объектом ревизии в рамках "неклассической" логики, оказались не только малоизвестные законы, но и те, которые до XX столетия считались в логике основными, такие как закон двойного отрицания, закон исключенного третьего, закон непротиворечия (эти законы классической логики нашли отражение в основных аксиомах булевой алгебры).

Мало того, оказывается в рамках этой парадигмы доказано существование континуума некоторых вариантов неклассических логик [22]. Теперь можно только ликовать - на каждого жителя Земли приходиться не менее континуума уникальных логик. Огорчает лишь одно обстоятельство: ситуация чем-то напоминает известный библейский сюжет о незавершенном строительстве Вавилонской башни.

## 5. Возможные решения некоторых проблем

А можно ли предложить систему математического моделирования естественных рассуждений, в которой учитывались бы многие их специфические особенности, но при этом не требовалось бы в корне изменять законы булевой алгебры? Решением этой проблемы я занимался несколько лет. Результаты этих поисков опубликованы в различных изданиях и докладывались на международных и общероссийских конференциях по искусственноому интеллекту и логике [13-21]. Но наиболее интересным результатом мне кажется то, что предложенный подход при определенной методической переработке оказывается вполне доступным для восприятия и понимания даже тем, кто в силу ряда обстоятельств недостаточно знаком с основными понятиями и идеями логики и математики. Опыт моего общения со студентами Санкт-Петербургского Государственного Университета Культуры и Искусств и школьниками показал, что они в течение нескольких аудиторных занятий вполне овладевают методами грамотного анализа таких рассуждений, которые трудны даже для специалистов. В одной из школ Санкт-Петербурга по этой методике начались занятия по логике среди учеников 7-го и 8-го классов. Преподавательница информатики Р.Ю. Дамм

адаптировала ее к школьному курсу образования. В результате школьники через несколько уроков успешно справляются с многими сложными задачами анализа естественных рассуждений.

В чем же основные отличия данного подхода? Выделим два основных.

Отличие первое. В качестве структурной единицы формального рассуждения было выбрано суждение, т.е. в общем случае утверждение, в котором некоторому объекту или классу объектов (субъекту) присваивается некоторый набор признаков (предикатов) или их отрицаний. Термин "суждение" и сопутствующие термины "субъект" и "предикат" взяты из классической силлогистики, но в данном подходе смысл термина "суждение" более широкий. В Аристотелевской силлогистике субъекту суждения соответствует один и только один предикат или его отрицание, в то время как в предлагаемом подходе в одном суждении субъекту может быть присвоено произвольное число предикатов или их отрицаний. Например, утверждение "Все тигры млекопитающие" может быть представлено как суждение Аристотелевского типа. Но в то же время суждение "Все тигры хищные млекопитающие, не живущие в воде и не приспособленные к жизни в условиях Крайнего Севера" уже не является Аристотелевским, но вполне соответствует определению суждения в новом подходе.

В форме суждения можно выразить не только многие "нормальные" предложения естественного языка, но и такие логические конструкции, как определения или толкования терминов; факты реальной жизни, выраженные с помощью языка ("Земля вращается вокруг своей оси"); многие математические теоремы; законы природы и т. д.

Суждение - это результат каких-то знаний о системе. Эти знания могут быть ошибочными или вообще не имеющими никакого отношения к реальности, но основная задача логического анализа рассуждений заключается не в выяснении безусловной истинности отдельных суждений, а в проверке их совместимости. В начальной стадии логического анализа рассуждений предполагается, что все суждения истинные. Но если наш анализ показывает, что рассуждение в целом логически несовместимо (некорректно), то в этом случае у нас имеются основания предположить, что хотя бы некоторые из суждений данного рассуждения не являются истинными. При этом следует учесть, что сопоставление умозрительных суждений с реальными фактами, выраженными в форме суждений, также является рассуждением.

Отличие второе. Связь между субъектом и предикатами или их отрицаниями в суждении соотносится с отношением включения множеств. Обычно такая связь при переводе предложений естественного языка в классическое суждение осуществляется с помощью глагола-связки "есть", которая не всегда явно используется, но часто подразумевается. Дальнейший переход к математической структуре производится за счет преобразования этой связки в математическое понятие включения множеств. При таком переходе формулировка исходного предложения существенно меняется, но при этом существенного искажения смысла не происходит. В качестве примера возьмем два предложения: 1) "Онегин, добрый мой приятель, родился на берегах Невы" и 2) "Все металлы электропроводны". Если использовать математическую формулировку, то эти предложения преобразуются в следующие: 1) "Онегин включен в множество моих добрых приятелей и в множество людей, родившихся на берегах Невы" и 2) "Множество металлов включено в множество электропроводных веществ".

Стоит отметить, что связка "есть" в классическом суждении стала использоваться в логике под влиянием работ схоластов лишь с XIV века. Аристотель формулировал суждения более однозначно. Например, суждение "Все A не есть B" по Аристотелю выражалось бы как "Любому A не присуще B". Такая формулировка суждения по смыслу более близка к математическому соотношению включения множеств.

Использование понятия "включение множеств" в суждениях однозначно определяет выбор математического аппарата для моделирования и анализа суждений и их произвольных совокупностей (рассуждений). Этим математическим аппаратом является известная многим по школьному курсу информатики алгебра множеств. Законы алгебры множеств соответствуют законам булевой алгебры. Некоторые математики даже считают их эквивалентными (точнее, изоморфными) системами, хотя это не совсем так. Но для моделирования рассуждений алгебра множеств используется не в своем обычном виде - здесь она существенно расширена за счет использования некоторых мало известных свойств отношения включения множеств. Эти свойства подробно изучены в математике, но пока что не получили широкой известности, потому что они исследуются лишь в пределах некоторых появившихся сравнительно недавно разделов математики, таких как теория частично упорядоченных множеств и теория решеток. Однако при определенном методическом подходе понимание этих свойств и умение пользоваться ими при анализе рассуждений не требует от учащихся широкой математической подготовки, хотя некоторый минимальный объем математических знаний безусловно необходим.

На основе приведенных выше предпосылок был разработан метод математического моделирования рассуждений, с помощью которого в рамках силлогистики удалось решить многие проблемы. Разумеется, предложенный метод не претендует на полноту охвата всех возможных логических построений и не заменяет все методы и средства математической логики. Вместе с тем, при анализе рассуждений, которые без существенной потери смысла преобразуются в произвольную совокупность суждений, метод позволяет получить все возможные следствия и проверить отсутствие (или наличие) противоречий, оценить неопределенность (неполноту) данного рассуждения, сформулировать разнообразные гипотезы, уменьшающие эту неопределенность, оценить различные аргументы, подтверждающие или опровергающие данное рассуждение, решить ряд сложных проблем индуктивного вывода и т.д. Многие из упомянутых задач при использовании традиционных методов решаются намного труднее или же не решаются вообще.

Некоторые возможности нового метода удобно продемонстрировать на простом примере, взятом из книги Льюиса Кэрролла [23]. Пусть заданы три посылки:

Все малые дети неразумны.

Все, кто укрощает крокодилов, заслуживают уважения.

Все неразумные люди не заслуживают уважения.

Известные методы (включая метод анализа соритов, разработанный Кэрроллом) позволяют нам установить, что следствием этих посылок является суждение "Все, кто укрощает крокодилов, не являются малыми детьми".

Если воспользоваться предлагаемым методом, то оказывается, что из этой системы посылок можно вывести 9 следствий, в том числе и то, которое выведено традиционными методами. Остальные следствия являются промежуточными, но все они играют большую роль при более детальном анализе рассуждения. Кроме того, устанавливается, что данная система является полной системой. Это означает, что любое новое суждение, в котором содержатся только термины, содержащиеся в посылках, несовместимо с посылками. Например, суждение "Все разумные люди не укрощают крокодилов" вызывает в данном рассуждении коллизию парадокса "Все, кто укрощает крокодилов, не укрощает крокодилов". Это означает, что приняв как истинное суждение "Все разумные люди не укрощают крокодилов", мы приходим к тому, что людей, укрощающих крокодилов, не существует.

Полнота системы однако не препятствует включению в нее новых суждений, при условии, что в этих суждениях содержатся новые термины. Если к трем исходным посылкам добавить четвертую посылку с новым термином, например, "Все, кто жестоко обращается с детьми, не заслуживает уважения", то никаких коллизий не появится, но при этом мы

получим неполную систему с неопределенностями. Анализ неполных систем в традиционных методах связан с большими трудностями и во многих случаях не производится. Если же воспользоваться предлагаемым методом, то оказывается, что для этой новой системы можно сформулировать 12 новых суждений, каждое из которых по отдельности совместимо с исходной системой, но непосредственно из нее не выводится. К таким суждениям, в частности, относятся два взаимоисключающих суждения "Все неразумные люди жестоко обращаются с детьми" и "Все неразумные люди не обращаются жестоко с детьми". При этом каждое из них, взятое отдельно, совместимо с исходной системой. Такие "дополняющие" предложения в неполных системах можно использовать как гипотезы.

Эти и другие возможности метода для систем с небольшим числом терминов (порядка пяти) легко реализуются вручную с помощью специально разработанных стрелочных диаграмм. Для анализа неполноты более сложных систем уже требуется помочь компьютера. Автором разработана программа для быстрого и точного решения этих и многих других задач.

В структурах математической логики понятие "субъект" не рассматривается вообще - в ней из классической пары "субъект - предикат" используются только предикаты. Во вводном разделе математической логики (исчислении высказываний) любые предложения рассматриваются просто как истинные или ложные высказывания без дифференциации на "субъекты" и "предикаты". В обобщающей части математической логики (исчислении предикатов) основное внимание уделяется простым и сложным предикатам и их сочетаниям в формулах, при этом в современном варианте исчисления предикатов "субъекты" не предусмотрены. Это одна из основных причин многих трудностей, связанных с "переводом" естественных рассуждений на язык математической логики. Но дело не только в неточностях перевода. Подробное исследование математических особенностей структур на основе суждений показало, что алгоритмы логического вывода и анализа рассуждений в этой системе реализуются намного проще, чем при решении аналогичных задач, представленных в структурах математической логики [16, 20].

## Резюме

Математическая логика немало способствовала бурному развитию информационных технологий в XX веке, но из поля ее зрения выпало понятие "суждение", которое появилось в логике еще во времена Аристотеля и на котором, как на фундаменте, держится логическая основа естественного языка. Такое упущение отнюдь не способствовало развитию логической культуры общества и у многих даже породило иллюзию, что компьютеры способны мыслить не хуже самого человека. Многих даже не смущает то обстоятельство, что на фоне всеобщей компьютеризации в преддверии третьего тысячелетия логические нелепости в пределах самой науки (я уж не говорю о политике, законотворческой деятельности и о псевдонауке) встречаются даже чаще, чем в конце XIX века. И для того, чтобы понять суть этих нелепостей, нет необходимости обращаться к сложным математическим структурам с многоместными отношениями и рекурсивными функциями, которые применяются в математической логике. Оказывается, для понимания и анализа этих нелепостей вполне достаточно применить намного более простую математическую структуру суждения, которая не только не противоречит математическим основам современной логики, но в чем-то дополняет и расширяет их.

Недавно, в очередной раз просматривая известную монографию Н. И. Стяжкина [24], я обратил внимание на некоторые пропущенные ранее при чтении разделы книги и с удивлением обнаружил, что основы этого подхода интенсивно развивались многими логиками и математиками первой половины XIX века (Ж.Д. Жергонн, А.Д.Х. Твестен, В.М. Дробиш, А. де Морган и др.). Значительный вклад в это направление во второй половине XIX века внесли Дж. Венн и Льюис Кэрролл. Для полного завершения этого подхода

оставалось лишь "чуть-чуть" математических знаний, которые появились лишь в XX столетии. Не пора ли это незаслуженно забытое направление возродить? Может быть, это позволит нам и нашим потомкам хоть немного уменьшить все возрастающий поток логических и терминологических нелепостей, который в преддверии третьего тысячелетия захлестнул нас не только в политике и в средствах массовой информации, но и в хранителях нашего разума - в науке и образовании.

И последнее. Возможно, многим из читателей это утверждение покажется спорным, но мне представляется, что проблемы, поднятые в данной статье, имеют непосредственное отношение к нашим сугубо житейским проблемам. Можно найти немало достаточно веских причин современного кризиса в экономике, политике и в духовной жизни России. Но, если вдуматься, то окажется, что в основе каждой из этих причин лежит какая-либо деструктивная "стратегия мутной воды", на поддержку которой бросаются целые армии велеречивых демагогов и мистификаторов, основной задачей которых является "замазывание" логических и терминологических нелепостей защищаемой парадигмы. Для их деструктивной деятельности в России созданы прямо-таки тепличные условия за счет практически полного отсутствия логического образования. А чтобы оболванивать безграмотных людей, требуется не так уж и много интеллектуальных усилий.

### Список литературы

Леонов В.П. Долгое прощание с лысенковщиной. // Web-страница в Интернете <http://www.doktor.ru/doctor/biometr/lib/lis>

Пуанкаре А. О науке. - М.: Наука, 1983.

Арнольд В.И. Избранное - 60. М.: Фазис, 1997.

Блемхман И.И., Мышикис А.Д., Пановко Я.Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. Киев: Наукова думка, 1976.

Клейн М. Математика: Утрата определенности. М.: Мир, 1984.

Reichenbach H. Experience and Prediction. Chicago, 1961. P.5-6.

Зенкин А.А. Принцип разделения времени и анализ одного класса квазифинитных правдоподобных рассуждений (на примере теоремы Г.Кантора о несчетности).// Доклады РАН, раздел "Математика", том 356, №. 6, 733-735 (1997).

Зенкин А.А. Ошибка Георга Кантора // Вопросы философии. 2000. | 2. С. 165-168.

Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984.

Gödel K. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. Monatsh. Math. XXXVIII (1931), 173-198.

Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М.: Издательство Иностранной литературы, 1963.

von Neumann J. Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, J. Crelle, CLIV (1925), p. 219-240.

Кулик Б.А. Моделирование рассуждений на основе законов алгебры множеств // Труды V национальной конференции по искусственноому интеллекту. Казань, 7-12 октября 1996 г. Т.1. С. 58-61.

Кулик Б.А. Основные принципы философии здравого смысла (познавательный аспект) // Новости искусственного интеллекта, 1996, № 3, с. 7-92.

Кулик Б.А. Интерпретируемые системы логического вывода. В кн. Международная конференция "Смирновские чтения" (тезисы докладов). Институт философии РАН, 1997, с. 54-55.

Кулик Б.А. Логические основы здравого смысла / Под редакцией Д.А. Поспелова. - СПб, Политехника, 1997. 131 с.

Кулик Б.А. Логика здравого смысла. - Здравый смысл, 1997, № 1(5), с. 44 - 48.

Кулик Б.А. Программа для моделирования и анализа естественных рассуждений. - Компьютерные инструменты в образовании, 1998, № 2, с. 55 - 63.

Кулик Б.А. Система логического вывода на логических графах // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. - Материалы V Общероссийской научной конференции. Санкт-Петербург, 18-20 июня 1998 г. С. 169 -171.

Кулик Б.А. Алгебраические основы естественных рассуждений: Е-структуры - Материалы второй международной конференции "Логико-лингвистическое управление динамическими объектами (DOLLC'99)", Санкт-Петербург, 21-25 июня 1999 г., с. 29-40.

Кулик Б.А., Романов Л.Н. Алгебраический подход к моделированию и анализу естественных рассуждений на основе Е-структур // Интеллектуальное управление: новые интеллектуальные технологии в задачах управления (ICIT'99). - Труды Международной конференции, Переславль-Залесский, 6-9 декабря 1999 г. М.: Наука. Физматлит, 1999. С. 50-54.

Карпенко А.С. Логика: Феномены XX века // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. - Материалы VI Общероссийской научной конференции. Санкт-Петербург, 22-24 июня 2000 г. С. 461 - 465.

Кэрролл Л. История с узелками. - М.: Мир, 1973.

Стяжкин Н. И. Формирование математической логики. М.: Наука, 1967.

Для подготовки данной работы были использованы материалы с сайта <http://filosof.historic.ru>