Б.А. Кулик

Интерпретация классической логики на основе алгебры множеств (конспект предполагаемого выступления)

Содержание

Вступление
1. Силлогистика
 1.1. Некорректности в силлогистике
 1.2. Анализ полисиллогизмов на основе алгебры множеств
2. Математическая логика
 2.1. Взгляд в историю
 2.2. Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов
 2.3. Интерпретация языка математической логики
 2.4. Алгебра кортежей
 2.5. Избранные теоремы алгебры кортежей
 2.6. Интерпретация логического вывода
 2.7. Позитивные результаты интерпретации
 2.8. Нерешенные проблемы
Список литературы

Вступление

В Приоритетных направлениях фундаментальных и поисковых научных исследований (ПФНИ 2021-2030) в разделе 1.1.1.6. «Математическая логика» содержатся следующие ожидаемые результаты:

«Изучение проблемы извлечения знаний на основе анализа естественного языка, онтологий предметных областей, формальных понятий и теории измерений. Развитие теории семантического моделирования. Дальнейшая разработка логических формализмов и подходов для работы с естественными языками».

«Исследования по теории доказательств и основаниям математики, в том числе взаимосвязи синтаксических и семантических свойств, структурных и алгоритмических свойств в логике; вычислимости и определимости над произвольными структурами».

Рассматриваемые в этом докладе результаты исследований, на мой взгляд, являются определенным научным заделом, позволяющим приблизиться к решению некоторых из этих проблем, в частности, к таким, как «развитие теории семантического моделирования», «дальнейшая разработка логических формализмов и подходов для работы с естественными языками», «исследования по взаимосвязи синтаксических и семантических свойств в логике».

В широком смысле ***интерпретация*** – это толкование, объяснение, раскрытие смысла чего-нибудь. Предполагается, что интерпретация близка к семантике. В одной из самых популярных книг по математической логике, выдержавшей 6 изданий, [Mendelson, 2015], во Введении сказано, что в логике «семантические понятия носят теоретико-множественный характер». По сути, так оно и есть, поскольку в естественных рассуждениях речь идет об отношениях типа «часть – целое», «объекты – свойства» и т.д., которые можно выразить с помощью множеств.

Для обоснования некоторых положений доклада используются авторские математические разработки. Эти результаты содержатся в защищенной докторской диссертации [Кулик, 2007] и в многочисленных научных публикациях. В дальнейшем обсуждение и развитие этой теории продолжалось при активном участии А.Я. Фридмана, А.А. Зуенко, а также сотрудников лаборатории Интеллектуальных электромеханических систем, в которой я работаю с 1999 года, А.Е. Городецкого, В.Г. Курбанова, И.Л. Тарасовой.

В основе этих результатов лежит ***алгебраический подход***, точнее, подход на основе законов ***алгебры множеств***, четкое изложение которой содержится в широко известной книге Куранта и Роббинса «Что такое математика?». Первое издание этой книги вышло в 1941 году. В ней авторами была высказана крамольная для современной логики мысль о том, что **законы алгебры множеств можно обосновать без аксиом**, на основе одних только определений. Там же приведены примеры такого обоснования.

В основе современной логики лежит ***аксиоматический подход***, причем аксиомы и правила вывода сформулированы так, что их трудно понять непрофессионалу. Например, в аксиоматической ***теории*** (не алгебре!!!) ***множеств*** есть ***аксиома бесконечности***, и в то же время для определения ***множеств с одним элементом*** в этой теории, по признанию самих специалистов, при строгом подходе потребуется выражение, содержащее несколько ***десятков тысяч*** (**!!!**) знаков [Бурбаки, 1965, с. 187-188]. Получается, что понятие бесконечности в теории множеств намного проще понятия единицы.

Среди специалистов всех видов современной логики термин «***множество***» считается нежелательным (а иногда вроде бы и запрещенным). Чем это вызвано, трудно сказать. Но можно предположить, что причина – в парадоксах теории множеств, которые были обнаружены на заре становления современного аксиоматического подхода (рубеж XIX и XX столетий), в результате чего термин «множество» был признан многими математиками и логиками противоречивым. Хотя даже не специалисту в логике понятно, что термин сам по себе не может быть противоречивым – его противоречивость может зависеть от того, как этот термин определили и как его связали с другими терминами теории.

Источником противоречий термина «множества» в теории множеств является то, что в этой теории разрешается множеству быть элементом множества. Такое допущение в некоторых разделах математики присутствует и в настоящее время. Споры на эту тему до сих пор не утихли. Но одно несомненно: в алгебре множеств это допущение можно убрать – законы алгебры множеств от этого не изменятся. Обусловлено это тем, что в алгебре множеств системообразующим отношением является не отношение принадлежности элемента и множества ($\in$), а отношение включения множеств ($\subseteq$). Так что запрет термина «множество» в логике нельзя считать обоснованным.

Создателей и сторонников аксиоматического подхода в логике и в основаниях математики критиковал еще великий математик Анри Пуанкаре в начале XX столетия. Мне кажется, что его критика актуальна и сегодня, хотя, разумеется, она не отражает многие достижения и оплошности, появившиеся в логике за последнее столетие.

Наверное, найдутся те, кто расценит мое выступление как рекламу своих результатов. Отрицать это утверждение трудно. Наверное, среди ученых мало найдется тех, кто этого так или иначе не делает. Но, во-первых, мне кажется, сейчас трудно найти другой математический аппарат, чтобы обосновать то, о чем будет сказано далее. Если я в этом неправ, то критики, надеюсь, найдутся.

И во-вторых, есть еще одно соображение, связанное с актуальностью настоящего выступления. В настоящее время логика не преподается в школах и во многих институтах, хотя раньше это имело место (например, в гимназиях дореволюционной России и в школах СССР в период с 1947 по 1953 годы). Недостаток логического образования наблюдается не только в России, но и во многих других странах. И причина не только в том, что власти не заинтересованы в том, чтобы это сделать, но и в том, что современную логику трудно понять.

И что мы имеем в итоге? С одной стороны – власть, которая препятствует повышению логической грамотности, с другой стороны – профессионалы, которые не стремятся к тому, чтобы сделать логику более доступной. В результате ***формируется население, которое можно легко оболванить***. Если мы этого не хотим, то давайте внимательно отнесемся к попыткам как-то исправить эту ситуацию.

И еще одно. В отличие от современных логических теорий, которые с большим трудом и не всегда успешно усваиваются многими людьми с высшим образованием, алгебра множеств, как показывает опыт преподавания, легко воспринимается школьниками младших классов и даже дошкольниками. («Посмотри на эти фигурки… Найди среди них всех человечков… А теперь найди все зеленые фигурки… А теперь найди всех зеленых человечков»).

Начнем с определения понятия «логика». Таковых много. Есть даже весьма лестное для логики утверждение, что логика формирует законы правильного мышления. А как же тогда любимые многими из нас поэты, литераторы, которые дарят нам разного рода нелогичности типа метафор, афоризмов, фантазий и т.д.? Художники, предлагающие нам вместо скучных фотографий свое необычное восприятие увиденного? Разве у них всех неправильное мышление?

Мне больше нравится следующее определение логики.

Логика – это важнейшая составляющая человеческой культуры, ее основное назначение состоит в разработке корректных методов анализа правильности рассуждений и обоснований.

1. Силлогистика

1.1. Некорректности в силлогистике

Силлогистика была открыта Аристотелем более двух тысячелетий тому назад. О величии этого открытия говорит хотя бы тот факт, что за все эти годы огромного признания в ней мало что изменилось. Но, как мы увидим далее, в этой неизменности и есть ее недостаток.

В силлогистике сначала все кажется простым. Даны 4 типа предложений (***суждений***), которые весьма часто встречаются в повседневной речи и в рассуждениях:

A: Все *P* есть *Q* (общеутвердительное), пример: «Все крокодилы рептилии».

I: Некоторые *P* есть *Q* (частноутвердительное), пример: «Некоторые начальники головотяпы».

E: Все *P* не есть *Q* (общеотрицательное), пример: «Все жирафы не земноводные».

O: Некоторые *P* не есть *Q* (частноотрицательное)), пример: «Некоторые люди не переносят критику».

A, ***I***, ***E*** и ***O*** – общепринятые обозначения типов суждений. Иногда используются строчные буквы ***a***, ***i***, ***e*** и ***o***.

Силлогизм (более точное название – ***категорический силлогизм***) состоит из трех суждений, первые два называются ***посылками***, третье – ***заключением***. В силлогизме используются три ***термина***, один из них встречается в двух посылках (он называется ***средним*** (**M**)), два других (***больший*** (**P**) и ***малый*** (**S**)) – в разных посылках. Рассмотрим силлогизм:

1-я посылка: Все жирафы не хищники.

2-я посылка: Все тигры – хищники.

Заключение: Все тигры не жирафы.

Здесь термин «хищники» – средний термин, «жирафы» – больший, а «тигры»– малый.

Как мы увидим далее, правило силлогистики, в соответствии с которым терминам назначается статус «больший» и «малый», приводит к ошибкам.

Среди троек суждений силлогизма (***модусов***) есть ***правильные*** и ***неправильные***. Общее число различных модусов 256, из них только порядка 20-ти правильных. Почему я сказал «порядка 20-ти»? Потому что до настоящего времени среди логиков нет единого мнения о том, считать ли некоторые модусы правильными или нет. В разных весьма популярных учебниках по логике (два отечественных, один зарубежный) я нашел соответственно 24, 19 и 15 правильных модусов (цитируемые зарубежные авторы почему-то оказались более осторожными, чем наши соотечественники).

Сразу хотелось бы отметить, что термин «множество», хотя и не желателен в логике, но, тем не менее, активно в ней используется, только обходными путями. Так в учебниках по логике при обосновании правильности модусов силлогизма используются всякого рода «диаграммы», «модельные схемы» и т.д., которые на поверку оказываются ничем иным, как наглядными отображениями соотношений между множествами.

Для того, чтобы отличить правильные модусы от неправильных, в силлогистике разработана весьма сложная система правил. Из-за их запутанности силлогистика сейчас весьма непопулярна, хотя на самом деле, как мы увидим далее, это не столь уж и сложная и, к тому же, весьма распространенная система анализа рассуждений.

В силлогистике необходимо прежде всего научиться распознавать фигуру силлогизма (их четыре), которая зависит от порядка расположения терминов в посылках. Вот схемы этих фигур.

Фигура 1	***Фигура 2***	***Фигура 3***	***Фигура 4***
1. $\mathbf{M \rightarrow P}$	1. $\mathbf{P \rightarrow M}$	1. $\mathbf{M \rightarrow P}$	1. $\mathbf{P \rightarrow M}$
2. $\underline{\mathbf{S \rightarrow M}}$	2. $\underline{\mathbf{S \rightarrow M}}$	2. $\underline{\mathbf{M \rightarrow S}}$	2. $\underline{\mathbf{M \rightarrow S}}$
$\mathbf{S \rightarrow P}$	$\mathbf{S \rightarrow P}$	$\mathbf{S \rightarrow P}$	$\mathbf{S \rightarrow P}$

Согласно схемам, например, в первой фигуре средний термин (**M**) должен быть на первом месте в первой посылке и на втором месте во второй. Кроме того, во всех фигурах предусмотрен один и тот же состав и порядок терминов в заключениях (**S**→**P**).

Обратите внимание на первые посылки в фигурах силлогизма: в них присутствие малых (**S**) терминов запрещено – это одно из обязательных правил силлогистики. То есть ***в первой посылке силлогизма могут присутствовать только большие термины*** (**P**). Таким образом, статус терминов (**S** и **P**) определяется не по содержанию, а в зависимости от порядка расположения посылок в силлогизме.

Затем нужно запомнить список правильных модусов в каждой фигуре. Вот один из часто встречающихся вариантов (в тройках символов используются обозначения типов суждений):

1-я фигура: ***AAA***, ***EAE***, ***AII***, ***EIO***, ***AAI***, ***EAO***.

2-я фигура: ***AEE***, ***AOO***, ***EAE***, ***EIO***, ***AEO***, ***EAO***.

3-я фигура: ***AAI***, ***EAO***, ***IAI***, ***OAO***, ***AII***, ***EIO***.

4-я фигура: ***AAI***, ***AEE***, ***IAI***, ***EAO, AEO***, ***EIO***.

Эти правила трудно запомнить. Я, например, не один десяток лет занимаюсь логикой, но так и не сумел это сделать. Так что лучше этот список вместе со схемами фигур силлогизма повесить где-нибудь на видном месте.

Рассмотрим пример силлогизма:

1-я посылка: Некоторые мои сослуживцы – вегетарианцы.

2-я посылка: Все мои друзья не вегетарианцы.

Заключение: Некоторые мои сослуживцы не мои друзья

Ясно, что здесь «вегетарианцы» – средний термин (**M**), «мои сослуживцы» – больший (**P**) – он находится в 1-й посылке, «мои друзья» – малый термин (**S**).

Сравниваем посылки нашего силлогизма со схемами фигур.

Получаем: 1-я посылка типа ***I*** соответствует схеме **P → M**,
2-я посылка типа ***E*** соответствует схеме **S → M.**

Выходит, у нас 2-я фигура. Но в списке правильных модусов этой фигуры нет модуса, начинающегося с букв ***IE***. Значит, ***данный силлогизм неправильный***.

Можно найти объяснение тому, почему этот модус неправильный. В нем «мои друзья» – малый термин, поэтому в заключении он должен стоять на первом месте. Тогда получим такое заключение «Некоторые не мои друзья – мои сослуживцы». С точки зрения современной логики смысл заключения при этом не изменился. Но в традиционной силлогистике отрицание первого термина в суждении запрещено.

Попробуем поменять местами посылки. В современной логике это не влияет на результаты логического вывода. В силлогистике это тоже допустимо, но только при этом надо больший термин назвать малым, а малый – большим (иначе нарушим правила). Теперь «вегетарианцы» – опять же средний термин (**M**), но большим термином (**P**) стали «мои друзья», а малым (**S**) – «мои сослуживцы».

Тогда получим: 1-я посылка типа ***E*** соответствует схеме $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{M}$,

2-я посылка типа ***I*** соответствует схеме $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{M}$.

Опять получилась 2-я фигура, но модус теперь начинается с букв ***EI***. Такой модус есть в списке правильных модусов 2-й фигуры – ***EIO***, а выведенное после перестановки посылок заключение как раз и относится к типу ***O***. Значит, ***силлогизм правильный***.

Получается, что в полном соответствии с правилами силлогистики мы нашли два исключающих друг друга решения. Следовательно, некоторые правила в силлогистике нуждаются в пересмотре. И здесь не только путаница с большим и малым терминами. Есть еще некоторые неточности, но из экономии времени о них не буду рассказывать. Можете сами посмотреть, что получится, если первую посылку нашего примера заменить на равносильную ей «Некоторые вегетарианцы – мои сослуживцы».

Рассмотренные примеры, иллюстрирующие неоднозначность правил силлогистики, не сразу приходят в голову, но есть пример, который прямо бросается в глаза. Речь идет о широко известном модусе ***Barbara*** (1-я фигура категорического силлогизма, модус ***AAA***) и не менее известном примере этого модуса:

Все люди смертны.

Сократ – человек.

Следовательно, Сократ смертен.

Здесь слово «Весь» во второй посылке пропущено, так как вроде бы никто не собирается исследовать части Сократа. Однако Сократа все-таки разобрали по частям, и сделали это специалисты по силлогистике. В оправдание Аристотеля скажу, что четвертую фигуру силлогизма, о которой речь пойдет далее, придумали его последователи (примерно через несколько сотен лет после его открытия).

Попробуем поменять местами посылки в силлогизме о Сократе. В итоге (все же придется потрудиться с переименованием статуса терминов) мы придем к выводу, что новый силлогизм относится к 4-й фигуре. Однако в этой фигуре нет правильного модуса ***AAA***, но есть правильный модус ***AAI***. Это означает, что заключение не может быть типом ***A*** (Сократ смертен), но только типом ***I***, причем термин «Сократ» превращается из малого термина в больший. В итоге мы получим следующее заключение измененного силлогизма (точный перевод типа ***I***):

Некоторые (а возможно, и все) смертные есть часть Сократа (а возможно, и весь Сократ).

По-моему, здесь можно обойтись без комментариев.

1.2. Анализ полисиллогизмов на основе алгебры множеств.

Изменить неоднозначные правила традиционной силлогистики почему-то никто не решается (по крайней мере, в учебниках по логике это не отражено). Но было предложено другое решение проблемы. Оно содержится в моей книге [Кулик, 2001].

В предложенном варианте анализа силлогизмов (и не только силлогизмов, но и ***полисиллогизмов***, т.е. рассуждений, у которых более двух посылок) все основано на законах алгебры множеств. Давайте посмотрим, как это делается.

Для тех, кто не изучал (или забыл) алгебру множеств, объясню с помощью рисунков некоторые основные понятия. Кстати, эти рисунки («***круги Эйлера***») еще в XVIII веке придумал Леонард Эйлер. Он пользовался ими для объяснения силлогизмов в письмах к некоторым принцессам (двум дочерям маркграфа Бранденбург-Шведт), которых обучал физике и философии в современном стиле – по переписке. Эти рисунки, по-видимому, послужили в дальнейшем для ряда ученых своеобразным толчком к созданию алгебры множеств.

Знак $\subseteq$ используется в алгебре множеств для обозначения ***отношения включения*** множеств (точный перевод: *включено или равно*). С помощью кругов Эйлера отношение $A \subseteq B$ изображается так, как показано на Рис. 1.

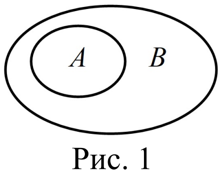

Рис. 1

Обозначение $\overline{A}$ используется для операции ***дополнения*** множества A. Чтобы найти дополнение множества, необходимо знать ***универсум***, в котором это множество задано (например, в качестве универсума для множества жирафов можно выбрать множество животных). Обозначим универсум знаком ***U***, а на рисунках будем его изображать в виде прямоугольника. Тогда дополнение множества A (т.е. $\overline{A}$) отобразится незакрашенной областью прямоугольника ***U*** на Рис. 2.

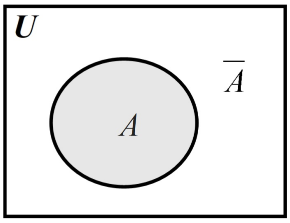

Рис. 2

Еще две основные операции алгебры множеств – ***пересечение*** ($\cap$) и ***объединение*** ($\cup$) – изображены на рисунках 3 и 4. Результаты операций закрашены серым цветом.

$A \cap B$

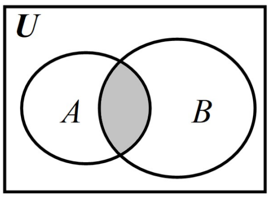

Рис. 3

$A \cup B$

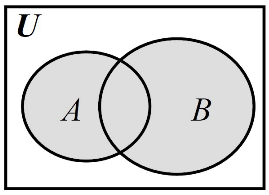

Рис. 4

В алгебре множеств также используется термин ***пустое множество*** ($\varnothing$). На Рис. 5 показана ситуация, когда при пересечении множеств A и B получается $A \cap B = \varnothing$.

$A \cap B = \varnothing$

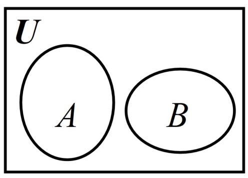

Рис. 5

Ясно, что для этой ситуации верны следующие соотношения: $A \subseteq \overline{B}$ и $B \subseteq \overline{A}$.

Сначала рассмотрим, как выражаются суждения в алгебре множеств. Пусть термины в суждениях обозначают имена некоторых множеств (млекопитающих, вегетарианцев, путешествующих по Кавказу, работающих в фирме «Гвоздь», и т.д.). Заодно расширим (по сравнению с силлогистикой) возможный состав типов суждений.

Во-первых, разрешается использовать отрицание первого термина (например, «Все (или Некоторые) ***не*** *P* есть *Q*») – в традиционной силлогистике это запрещено, хотя имеются работы логиков, в которых такое расширение допускается (негативная силлогистика).

Во-вторых, вместо единственного второго термина в суждениях допускается использовать несколько терминов (например, «Все *P* есть (*Q* и не *R*))». По сути, мы объединяем тем самым в одном суждении несколько разных суждений (в данном случае «Все P есть Q» и «Все P не есть R»).

Тогда суждение типа ***A*** запишется как $P \subseteq Q$, суждение типа ***E*** – как $P \subseteq \overline{Q}$, а суждение «Все P есть (Q и не R)» – как $P \subseteq (Q \cap \overline{R})$.

С «***частными***» суждениями (типы ***I*** и ***O***) поступим так: обозначим греческими буквами (α, β и т.д.) некоторые безымянные (***неопределенные***) непустые множества. Тогда суждение типа ***I*** (Некоторые P есть Q) выражается как $\alpha \subseteq (P \cap Q)$ (т.е. множества P и Q имеют непустое пересечение), а суждение типа ***O*** (Некоторые P не есть Q) – как $\beta \subseteq (P \cap \overline{Q})$.

В качестве ***правил логического вывода*** достаточно использовать только три ***закона алгебры множеств***:

1) ***контрапозиции***: $A \subseteq B$ равносильно $\overline{B} \subseteq \overline{A}$;

2) ***транзитивности***: если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$;

3) ***инволюции*** (двойного дополнения); $\overline{\overline{A}}$ равносильно A.

Для понимания закона контрапозиции рассмотрим Рис. 6.

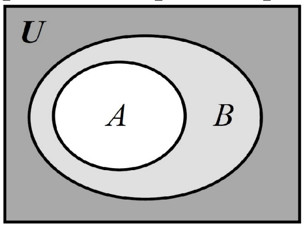

Рис. 6

Здесь ясно, что $A \subseteq B$. Тогда дополнением области A (т.е. $\overline{A}$) является вся закрашенная область, а дополнение области B (т.е. $\overline{B}$) закрашено темным цветом. Нетрудно убедиться, что область $\overline{B}$ включена в область $\overline{A}$.

Закон транзитивности иллюстрируется на Рис. 7.

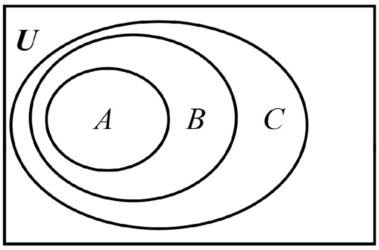

Рис. 7

Назовем обозначения терминов и их дополнений ***литерами***. Для анализа результатов необходимо знание следующих ситуаций, которые называются ***коллизиями***:

Коллизия парадокса распознается, если при выводе заключений получен результат типа $A \subseteq \overline{A}$. По законам алгебры множеств это означает, что термин A соответствует пустому множеству.

Коллизия цикла возникает, если при выводе следствий получена цепочка, начинающаяся и заканчивающаяся одной и той же литерой, например, $C \subseteq \overline{B} \subseteq \overline{A} \subseteq C$. В таком случае, все литеры, входящие в цикл, представляют одно и то же множество.

В книгах [Кулик, 2001; Кулик, 2020] также предлагается к знаниям основ алгебры множеств добавить знание начальных понятий ***теории графов*** и ***частично упорядоченных множеств***. Но оказывается, что можно сравнительно легко анализировать полисиллогизмы и без этих дополнительных знаний.

Чтобы существенно упростить анализ полисиллогизмов, будем использовать ***схемы***, в которых отношение $\subseteq$ изображается линией со стрелкой, например, $P \subseteq \overline{Q}$ изображается как $P \to \overline{Q}$.

Также примем, что для каждого имени множества (например, B, $\overline{Q}$, δ) в схеме обязательно содержится его дополнение ($\overline{B}$, Q, $\overline{\delta}$).

Для удобства будем записывать имена терминов в двух строках, в верхних строках расположим все позитивные термины (т.е. без знака дополнения), а в нижних – все негативные, причем термин и его дополнение поместим друг под другом.

Для иллюстрации метода рассмотрим полисиллогизм:

1) Все мои друзья хвастуны и не скандалисты.

2) Все хвастуны не уверены в себе.

3) Все не скандалисты уверены в себе.

Что из этого следует?

Обозначим *Д* – мои друзья, *Х* – хвастуны, *С* – скандалисты, *У* – уверенные в себе. Затем нарисуем схему, в которой изобразим все посылки. Тогда получим такое изображение (Рис. 8):

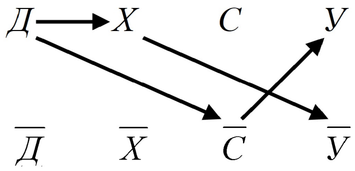

Рис. 8

На следующем этапе дорисуем на схеме контрапозиции всех посылок. Для этого можно применить следующие простые правила:

1) Если суждение представлено горизонтальной стрелкой, то его контрапозиция рисуется в другой строке, но стрелка при этом направлена в противоположную сторону.

2) Если суждение представлено наклонной стрелкой, то его контрапозиция рисуется как наклонная стрелка, соединяющая противоположные литеры, при этом направление стрелки (вверх или вниз) остается неизменным.

С учетом приведенных правил, нарисуем контрапозиции всех посылок с помощью пунктирных стрелок. Тогда получим (Рис. 9):

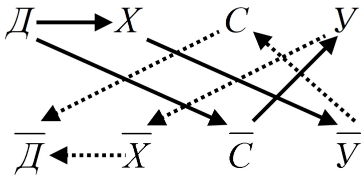

Рис. 9

Найдем на этом рисунке ***начальные литеры***, т.е. те, в которые не входит ни одна стрелка. В некоторых случаях, когда все литеры участвуют в циклах, такое сделать невозможно, но в данном примере можно найти одну начальную литеру. Это литера *Д*. Теперь начнем «передвигаться» по направлениям стрелок, чтобы выявить цепочки литер и использовать правило транзитивности для получения новых следствий. В итоге найдем следующие цепочки: 1) $Д \subseteq \overline{C} \subseteq У \subseteq \overline{X} \subseteq \overline{Д}$; 2) $Д \subseteq X \subseteq \overline{У} \subseteq C \subseteq \overline{Д}$.

Получилась коллизия парадокса $Д \subseteq \overline{Д}$, которая означает безрадостную для меня ситуацию: анализ показал, что *Д* – пустое множество.

Впрочем, ситуацию можно изменить, если предположить, что одна из заданных посылок не совсем точна. Допустим, неверна 3-я посылка, и вместо нее надо использовать обратное утверждение: «Все уверенные в себе не скандалисты». Тогда (можете проверить сами) ситуация в корне изменится – друзья у меня все-таки есть.

Чтобы понять, как в данной системе моделируются случаи, когда из посылок выводятся заключения с частными суждениями (***I*** и ***O***), рассмотрим пример, который использовался ранее:

1-я посылка: Некоторые мои сослуживцы – вегетарианцы.

2-я посылка: Все мои друзья не вегетарианцы.

Заключение: Некоторые мои сослуживцы не мои друзья.

Обозначим *С* – сослуживцы, *Д* – друзья, *В* – вегетарианцы. Тогда посылки можно выразить так: 1) $\alpha \subseteq (C \cap B)$; 2) $Д \subseteq \overline{B}$, а схема посылок и их контрапозиций будет выглядеть, как на Рис. 10:

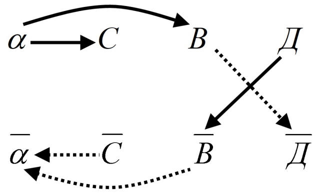

Рис. 10

Найдем на схеме начальные литеры. Их три (α, *Д* и $\overline{C}$), но для вывода частного заключения в силлогизмах интерес представляет литера, из которой выходят более одной стрелки, т.е. в данном примере – литера α. Из нее «достижимы» литеры *С* и $\overline{Д}$, а значит, пересечение соответствующих множеств не пусто, что подтверждает корректность заключения силлогизма «Некоторые мои сослуживцы не мои друзья». И этот вывод не зависит от порядка расположения посылок и от того, какой статус (**M**, **S** или **P**) присвоен терминам. Тем более, вывод не зависит от того, какой фигуре силлогизма соответствует данный модус.

Из сказанного, как мне представляется, ясно, что предложенная методика логического анализа имеет по сравнению с традиционной силлогистикой следующие преимущества:

1) методика математически обоснована и сравнительно проста в использовании;

1) в ней отсутствуют неопределенности традиционной силлогистики;

2) с ее помощью сравнительно легко анализируются не только силлогизмы, но и произвольные множества суждений;

3) она позволяет анализировать логические некорректности типа парадокса или цикла.

Открытие Аристотеля по праву занимает одно из почетных мест в истории науки. Оно стало толчком в развитии не только логики, но и многих разделов математики. Но обнаруженные в силлогистике неопределенности требуют иного подхода к анализу «простых» рассуждений.

Книга «Логика естественных рассуждений», в которой подробно изложена новая методика анализа рассуждений, была издана более 20 лет назад. В Интернете она попала в списки рекомендуемой литературы по логике, математической логике и даже по основаниям математики. Но со стороны тех, кто отвечает за качество учебной литературы по логике и публикует эту литературу, нет никакой реакции. Ни критики, ни попыток исправить неприятную ситуацию с традиционной логикой.

2. Математическая логика

Существует немало типов рассуждений и обоснований, которые нельзя выразить и решить с помощью силлогистики. Вот простой пример такого рассуждения [Чень, Ли, 1983]:

1-я посылка: Некоторые пациенты любят всех докторов.

2-я посылка: Ни один пациент не любит знахарей.

Следовательно, никакой доктор не является знахарем.

Рассмотрим, почему это рассуждение невозможно выразить на языке силлогистики. Во-первых, в силлогистике нет аналитических средств для учета квантора «Все» во втором термине первой посылки («любят всех докторов»). Во-вторых, в посылках и в заключении используются разные отношения: в посылках бинарное отношение «любит», а в заключении – отношение «есть» (или «является»), которое можно интерпретировать как отношение включения множеств. И для анализа этого, казалось бы, простого рассуждения необходимы далеко не самые простые методы математической логики.

Посмотрим, что получится, если в математической логике использовать алгебру множеств. Выше была показана полезность такого подхода на примере силлогистики. Но удастся ли сделать нечто подобное с математической логикой?

Сразу отмечу: распространить этот подход на многие разделы и приложения математической логики пока не удалось. Некоторые нерешенные проблемы содержатся в завершающей части доклада. Но кое-что в этом направлении сделано. И в этом докладе будут показаны основные результаты этой работы, относящиеся к естественным рассуждениям.

В отличие от силлогистики, содержание математической логики невозможно изложить в одном тексте, поэтому мне остается лишь раскрыть отдельные аспекты этой темы.

2.1. Взгляд в историю

Сначала рассмотрим вкратце некоторые этапы истории математической логики. В книге [Стяжкин, 1967] развитие математической логики прослеживается со времен античности, и в этом есть своя правда. Но нельзя не учитывать то обстоятельство, что коренной перелом в развитии математической логики произошел не так давно – в конце XIX века, когда были сформулированы основы теории множеств (Г. Кантор, Р. Дедекинд и др.), открыты парадоксы теории множеств (Г. Кантор, Ч. Бурали-Форти и др.), а на рубеже XIX и XX столетий стали завоевывать популярность публикации математиков и философов, заложивших основы современного аксиоматического подхода (Г. Фреге, Ч. С. Пирс, Дж. Пеано, Б. Рассел и др.). Именно в этот период математическая логика (другое ее название «*символическая логика*») стала развиваться в русле аксиоматического подхода без использования якобы противоречивого понятия «множество».

Аксиоматическая теория множеств в настоящее время рассматривается как один из подразделов математической логики [Mendelson, 2015]. Приведу одну цитату из этой книги: «Поскольку семантические понятия носят теоретико-множественный характер, а теория множеств, по причине парадоксов, представляется в известной степени шаткой основой для исследований в области математической логики, то многие логики считают более надежным синтаксический подход, состоящий в изучении формальных аксиоматических теорий с применением лишь довольно слабых арифметических методов».

Обратите внимание в этой цитате на противопоставление семантического (т.е. теоретико-множественного) и синтаксического (т.е. аксиоматического) подходов. И еще одно интересное наблюдение: «шаткая основа» (теория множеств) подробно изложена в 4-й главе книги Э. Мендельсона.

Таким образом, пути логики и алгебры множеств основательно разошлись, после чего основы логики перестали быть понятны для многих. Хотя основные законы логики, такие, как законы непротиворечия, исключенного третьего, де Моргана и т.д., неявно содержатся в математической логике. Но в ней эти законы выводятся с помощью определенных правил из цепочек символов, выражающих трудно понимаемые аксиомы.

И мне никак не понять, почему в те времена из спорной теории множеств не выделили ясную и лишенную противоречий алгебру множеств и не заложили ее в основу математической логики. А математическая логика в современном варианте пусть осталась бы, но только под другим названием – символическая логика.

2.2. Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов

Хотя имеется немало широко известных публикаций по математической логике, я буду в основном цитировать наиболее популярную и достаточно ясно изложенную книгу на эту тему, а именно 6-е издание книги Э. Мендельсона [Mendelson, 2015]. На русском языке в 1971 г. было опубликовано 3-е издание этой книги. В 6-м издании много чего добавлено, изменены некоторые обозначения, но основные разделы практически сохранились.

Популярность этой книги, по-видимому, обусловлена тем, что Э. Мендельсон, в отличие от многих своих коллег, считал, «что начинающим следует предлагать наиболее естественные и легкие доказательства», под которыми понимаются «самые непринужденные теоретико-множественные методы». В Предисловии к книге, написанном еще в 1963 году, есть еще одна примечательная фраза: «Значение требования конструктивных доказательств (имеются в виду доказательства в рамках аксиоматического подхода – БК) может быть оценено только после известного опыта занятий математической логикой. В конце концов, если уж нам предстоит быть изгнанными из «канторова рая» (как назвал Гильберт неконструктивную теорию множеств), то, по крайней мере, мы должны знать, чего лишаемся».

Примечательно, что эта фраза сохранилась в Предисловии 5-го издания книги Э. Мендельсона (2010 г.), а в 6-м издании (2015 г.) она отсутствует.

Математическая логика содержит два основных раздела, предназначенных для дедуктивного анализа: относительно простое ***исчисление высказываний*** и весьма сложное ***исчисление предикатов***.

Обучение математической логике начинается с двух моделей. Первая модель – это *таблицы истинности* для логических связок $\neg$ (не), $\wedge$ (и), $\vee$ (или), $\supset$ (если, то). С помощью таких таблиц можно доказывать теоремы исчисления высказываний, но для обоснования теорем исчисления предикатов они малопригодны. В приводимых ниже таблицах истинности символами ***T*** и ***F*** обозначены соответственно «истина» (*true*) и «ложь» (*false*).

Таблица 1
(отрицание)

A	$\neg A$
F	***T***
T	***F***

Таблица 2
(конъюнкция)

A	B	$A \wedge B$
F	***F***	***F***
F	***T***	***F***
T	***F***	***F***
T	***T***	***T***

Таблица 3
(дизъюнкция)

A	B	$A \vee B$
F	***F***	***F***
F	***T***	***T***
T	***F***	***T***
T	***T***	***T***

Таблица 4
(импликация)

A	B	$A \supset B$
F	***F***	***T***
F	***T***	***T***
T	***F***	***F***
T	***T***	***T***

Вторая (основная) модель начинается с определения ***языка первого порядка*** ($\mathcal{L}$), где предусматривается использование определенного алфавита для обозначения ***переменных***, ***констант*** (значений переменных), ***функций*** и ***предикатов***. В языке $\mathcal{L}$ также используются ***логические связки***, в состав которых, помимо $\neg$, $\wedge$, $\vee$ и $\supset$, входят ***кванторы*** $\forall$ (для всех) и $\exists$ (существует). Излагаются правила, с помощью которых формируются правильно построенные формулы (***ппф***). Правила простые, но здесь я их не буду приводить.

Язык $\mathcal{L}$, в свою очередь, используется для построения ***теории первого порядка*** K, в которой используются ***ппф*** языка $\mathcal{L}$, а также ***аксиомы*** и ***правила вывода***, причем аксиомы делятся на два класса: ***логические*** и ***собственные*** (или нелогические).

Логические аксиомы: если $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, и $\mathcal{D}$ – ***ппф*** языка $\mathcal{L}$, то теория K содержит следующие аксиомы.

(A1) $\mathcal{B} \supset (\mathcal{C} \supset \mathcal{B})$;

(A2) $(\mathcal{B} \supset (\mathcal{C} \supset \mathcal{D})) \supset ((\mathcal{B} \supset \mathcal{C}) \supset (\mathcal{B} \supset \mathcal{D}))$;

(A3) $(\neg\mathcal{C} \supset \neg\mathcal{B}) \supset ((\neg\mathcal{C} \supset \mathcal{B}) \supset \mathcal{C})$;

(A4) $(\forall x_i)\mathcal{B}(x_i) \supset \mathcal{B}(t)$;

(A5) $(\forall x_i)(\mathcal{B} \supset \mathcal{C}) \supset (\mathcal{B} \supset (\forall x_i)\mathcal{C})$.

Я не привожу здесь ни пояснений, содержащихся в тексте книги, ни собственных разъяснений. Это, как уже было сказано, потребует много времени и не предусмотрено в данном докладе. Первые три аксиомы – это аксиомы исчисления высказываний, аксиомы (A4) и (A5) расширяют область их применения до исчисления предикатов. Их лаконичность впечатляет – из них выводятся все теоремы и законы классической логики.

Но понятными их трудно назвать.

Что касается собственных (или нелогических) аксиом, то они служат для построения различных теорий (например, теории групп или формальной арифметики). Если собственных аксиом нет, то теория K называется ***исчислением предикатов первого порядка***.

Рассмотрим ***правила вывода***. Они тоже весьма лаконичны.

1. ***Modus ponens*** (MP): из $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B} \supset \mathcal{C}$ следует $\mathcal{C}$.
2. ***Правило обобщения*** (Gen): из $\mathcal{B}$ следует $(\forall x_i)\mathcal{B}$.

Правило MP пришло из античности, впервые оно упомянуто в трудах преемника Аристотеля Теофраста. Что касается правила Gen, то у Мендельсона оно выражено не совсем корректно. Далее в разделе «Интерпретация логического вывода» мы проанализируем его более подробно.

Стоит отметить, что аксиомы исчисления предикатов – это ***общезначимые формулы***, т.е. формулы, истинные при любых значениях переменных. Также общезначимыми формулами являются все выведенные теоремы исчисления предикатов. При первом знакомстве с аксиомами и правилами вывода в математической логике возникает ряд вопросов.

Вопрос первый: чем обусловлен выбор именно этих непонятных аксиом? Известно, что многие ***неклассические логики*** также начинаются с таблиц истинности, не совпадающих с приведенными выше, или с аксиом, следствием которых становится нарушение ряда законов классической логики. Ясно, что из аксиом и правил вывода исчисления предикатов невозможно вывести законы неклассической логики. Но тогда непонятно, почему простые и понятные законы классической логики не рекомендуется выбрать в качестве аксиом?

Вопрос второй: почему эти аксиомы и правила весьма трудно использовать в качестве методов обоснований в естественных рассуждениях? В искусственном интеллекте, в частности, в таких его разделах, как «Моделирование рассуждений» и «Автоматическое доказательства теорем», эти правила не используются в силу малой эффективности, но применяются принципиально иные методы, например, метод резолюций и алгоритм унификации [Чень, Ли, 1983].

Вопрос третий: почему с помощью средств математической логики трудно, а иногда просто невозможно применять многие необходимые в естественных рассуждениях методы логического анализа, такие, как формулирование и проверка гипотез, анализ неопределенностей, распознавание и анализ ошибок и некорректностей в рассуждениях, вывод следствий с заданными свойствами, вывод абдуктивных заключений и т.д.? Эти методы и примеры их применения можно с большим трудом найти в работах по искусственному интеллекту, при этом часто они решаются с помощью неклассических логик, но в публикациях по математической логике их практически нет. Не в том ли причина, что математическая логика потеряла связь с семантикой, т.е. с ***интерпретацией***, в основе которой лежит алгебра множеств?

Этот вопрос естественно приводит нас к следующему разделу.

2. 3. Интерпретация языка математической логики

Далее будет часто использоваться термин «декартово произведение множеств». Поэтому имеет смысл подробно о нем рассказать. Это покажется удивительным, но в литературе по математике и логике декартово произведение множеств, которое ввел в математику Г. Кантор [Бурбаки, 1965, с. 307], используется часто, но его интересные свойства, связанные с логикой, оказывается, почти неизвестны.

Декартово произведение (ДП) n множеств $X, Y, \ldots, Z$ есть множество всех возможных n-местных кортежей, у которых на первом месте стоит элемент множества X, на втором – элемент множества Y, …, а на последнем – элемент множества Z.

Декартово произведение множеств X, Y, …, Z обозначается $X \times Y \times \ldots \times Z$.

Рассмотрим два примера ДП.

Пример 1. Для двух множеств $X = \{a, b\}$, $Y = \{a, d, f\}$

$X \times Y = \{(a, a), (a, d), (a, f), (b, a), (b, d), (b, f)\}$.

Здесь элементы множества $X \times Y$ – это ***пары*** (т.е. двухместные кортежи) элементов, у которых, в отличие от множеств, порядок строго определен. Чтобы отличить (упорядоченные) пары от множеств, их заключают не в фигурные, а в простые круглые скобки.

Пример 2. Исходные множества могут быть непрерывными интервалами, их ДП представляет собой непрерывную часть пространства. Например, на Рис. 11 затемненный прямоугольник вместе со своими границами изображает ДП отрезков AB и CD, находящихся на разных координатных осях. Тогда элементами ДП будут всевозможные пары чисел, которые обозначают координаты точек, расположенных на плоскости в пределах этого прямоугольника.

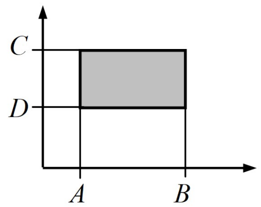

Рис. 11

Декартово произведение широко известно в математике при определении ***n-местного отношения***, которое равно подмножеству декартова произведения n одинаковых или разных множеств. Например, любая часть закрашенной области на Рис. 11 является двухместным отношением, определенным на ДП отрезков AB и CD.

Перейдем к интерпретации языка математической логики. Начнем с вопроса: Нужны ли аксиомы алгебре множеств?

Ответ: *не нужны*. Возможность обоснования законов алгебры множеств на основе только определений основных терминов, операций и отношений включения и равенства, была высказана в книге Куранта и Роббинса «Что такое математика?». В книге [Кулик, 2020], показано более подробно, как это можно сделать.

Подсказка о том, как использовать алгебру множеств в качестве интерпретации исчисления предикатов содержится, как ни странно, в книге [Mendelson, 2015], где предлагается следующая интерпретация языка первого порядка $\mathcal{L}$ (для краткости назовем ее ***интерпретация*** $\mathcal{L}$). В качестве области интерпретации (*domain*) переменной используется множество D элементов (констант), а для n-местных предикатов и формул со свободными переменными областью интерпретации является n-местное отношение, т.е. подмножество n-местных кортежей элементов из декартова произведения множеств D^n.

Вкратце поясню, что это означает. Если переменная не находится в области действия какого-либо квантора, то она считается ***свободной***. Например, в формуле $\forall y(P(x) \wedge Q(x, y))$ переменная x свободная, в то время как переменная y – ***связанная***. То, что в этой формуле оказывается свободной единственная переменная x, означает, что интерпретацией этой формулы является какое-то подмножество (возможно, пустое) области D изменения переменной x. Если бы не было квантора $\forall y$, то свободными были бы переменные x и y, а интерпретацией этой формулы было бы некоторое двухместное отношение, т.е. подмножество D^2.

Оказалось, что интерпретацию языка $\mathcal{L}$ можно выразить с помощью алгебры множеств. Но для этого потребовалось разработать и обосновать новую математическую структуру, получившую название ***алгебра кортежей*** [Кулик, 2007; Кулик и др., 2010; Кулик, 2020]. С алгеброй множеств ее связывает то, что в ней используются те же операции (дополнение, пересечение, объединение), те же отношения (равенства и включения) и те же законы (де Моргана, транзитивности, непротиворечия и т.д.). Отличие только в том, что в ней используются не обычные множества, а структуры, которые можно с помощью вычислений представить множествами n-местных кортежей элементов (т.е. n-местными отношениями). Эти структуры – ***декартовы произведения множеств и их объединения***. Как выяснилось в процессе исследований, они являются интерпретациями основных типов формул математической логики.

С учетом прикладной направленности алгебры кортежей в рассмотренную выше интерпретацию $\mathcal{L}$ были внесены следующие изменения.

Изменение 1. Для разных переменных языка $\mathcal{L}$ предложено использовать не одну какую-то область интерпретации D, а разные области интерпретации. Поэтому, во избежание возможных несогласованностей, было предложено по аналогии с базами данных приписывать к именам интерпретаций формул языка $\mathcal{L}$ ***схему отношения***, т.е. последовательность имен областей интерпретации переменных, формирующих это отношение. С учетом этого, имена областей интерпретации переменных названы ***атрибутами***, а области интерпретации атрибутов – ***доменами***.

Изменение 2. Для многих задач логического анализа более удобно рассматривать n-местное отношение не как множество кортежей элементов, а как объединение декартовых произведений. Поскольку ДП формируется из множеств, в качестве значений атрибута используются не элементы его домена, а имена или обозначения (например, A_2 или $\{b, d\}$) всех подмножеств домена. Множества с этими именами или обозначениями названы ***компонентами*** атрибута. Короче: *компоненты – это произвольные подмножества домена атрибута*.

Объединение декартовых произведений, рассматриваемое как отдельная структура, ранее не исследовалось. Для этой структуры не были известны алгоритмы операций (дополнение, пересечение, объединение), алгоритмы проверок включения одной структуры в другую и т.д. В публикациях содержатся только отдельные операции для ДП (их пересечение и разность), а также алгоритм проверки включения одного ДП в другое. Оказалось, что все эти алгоритмы и их обоснования можно существенно упростить, если отказаться от общепринятых обозначений ДП (D^n, $A \times B \times C$, $\prod_{i=1}^{n} D_i$ и т.д.). Вместо этого предложено представлять ДП как кортежи компонент, при этом каждая компонента с помощью схемы отношения привязывается к определенному атрибуту. Определяемый ниже C-кортеж как раз и является подобной записью ДП. Тогда более сложные структуры записываются в виде матриц.

2.4. Алгебра кортежей

Рассмотрим кратко основные термины и структуры алгебры кортежей (АК). Законы АК соответствует законам алгебры множеств. Многоместные отношения в АК можно представить с помощью четырех типов структур (***АК-объектов***). Вместо логических связок ($\neg$, $\wedge$, $\vee$) здесь используются соответствующие операции (по сути, это модифицированные операции алгебры множеств) с многоместными отношениями. Интерпретация связки $\supset$ будет рассмотрена ниже.

Алгоритмы выполнения операций с АК-объектами, проверок включения, преобразований в другие типы и т.д. сформулированы и доказаны в АК в виде теорем. Формулировки теорем из [Кулик, 2020], номера которых упоминаются в тексте данной работы, приведены в разделе 2.5.

Информация о схеме отношения АК-объектов содержится в их именах: к идентификатору отношения приписывается его схема, заключенная в квадратные скобки. Например, имя $R[XYZ]$ означает, что АК-объект R содержится в пространстве, заданном ДП $X \times Y \times Z$. АК-объекты, относящиеся к одному и тому же пространству атрибутов, называются ***однотипными***.

Среди возможных компонент АК выделяются два типа, названных ***фиктивными компонентами***.

Полная компонента (обозначается $*$) равна домену соответствующего атрибута.

Пустая компонента (обозначается $\varnothing$) равна пустому множеству.

Рассмотрим типы структур АК – C-кортежи, C-системы, D-кортежи и D-системы. Эти обозначения ассоциируются со словами *conjunction* и *disjunction*, так как C-кортеж соответствует конъюнкции, а D-кортеж – дизъюнкции логических формул.

Структуры АК матричные, причем в ячейках матриц записываются не элементы, а компоненты. При преобразовании АК-объектов в формулы математической логики компоненты АК-объектов – это интерпретации одноместных предикатов, а сами АК-объекты – интерпретации формул или многоместных предикатов.

Перейдем к определению типов АК-объектов.

C-кортеж есть n-местное отношение, равное ДП содержащихся в нем компонент, которые записаны в виде кортежа, ограниченного квадратными скобками.

Например, АК-объект $T[XYZ] = [A * B]$ является C-кортежем, причем $A \subseteq X$, $B \subseteq Z$, а полная компонента «*» равна домену соответствующего атрибута (в данном случае, поскольку она находится на второй позиции, то $* = Y$). Этот C-кортеж можно преобразовать в обычное отношение с помощью ДП следующим образом:

$T[XYZ] = A \times Y \times B$.

Он соответствует логической формуле (в данном случае – конъюнкту)

$T(x, z) = A(x) \wedge \mathrm{True} \wedge B(z)= A(x) \wedge B(z)$,

в которой интерпретации одноместных предикатов $A(x)$ и $B(z)$ – это компоненты A и B соответствующих атрибутов. Домены любого атрибута соответствуют в логике константе True.

В АК доказано, что пересечение C-кортежей, если оно не равно пустому множеству, можно выразить как C-кортеж (Теоремы 2 и 3 в [Кулик, 2020]). Однако объединение C-кортежей равно единственному C-кортежу лишь в исключительных случаях. Поэтому возникает необходимость в определении структуры нового типа.

C-система – это отношение, равное объединению однотипных C-кортежей, которое записывается в виде матрицы, ограниченной квадратными скобками.

Например, $R[XYZ] = \begin{bmatrix} A_1 & * & A_3 \\ B_1 & B_2 & * \end{bmatrix}$ есть C-система, при этом $A_1 \subseteq X$, $A_3 \subseteq Z$ и т.д. Данная C-система преобразуется в обычное отношение с помощью ДП следующим образом:

$R[XYZ] = (A_1 \times Y \times A_3) \cup (B_1 \times B_2 \times Z)$.

C-системе в математической логике соответствует ***дизъюнктивная нормальная форма*** (ДНФ).

Если АК-объект преобразуется в обычное отношение, то его элементы называются ***элементарными кортежами***. Они представляют ***выполняющие подстановки*** соответствующей логической формулы. С помощью C-кортежей и C-систем можно выразить любое многоместное отношение, но для вычисления их дополнений требуются новые структуры – D-кортежи и D-системы, при их определении используется промежуточная структура – диагональная C-система.

Диагональная C-система – это C-система размерности $n \times n$, у которой все недиагональные компоненты – полные ($*$).

Например, $Q[XYZ] = \begin{bmatrix} A & * & * \\ * & B & * \\ * & * & C \end{bmatrix}$ – диагональная C-система.

Доказано (Теорема 9 из [Кулик, 2020]), что диагональная C-система есть результат вычисления дополнения некоторого C-кортежа.

D-кортеж – это отношение, равное диагональной C-системе и записанное как ограниченный перевернутыми квадратными скобками кортеж ее диагональных компонент.

Например, изображенную выше диагональную C-систему можно записать как D-кортеж: $Q[XYZ] =]A\ B\ C[$. Из Теоремы 9 ясно, что дополнение $Q[XYZ]$ равно C-кортежу $[\ \overline{A}\ \ \overline{B}\ \ \overline{C}\ ]$, где $\overline{A} = X \setminus A$, $\overline{B} = Y \setminus B$, $\overline{C} = Z \setminus C$ (здесь \ – операция ***разности множеств***).

D-система есть отношение, равное пересечению однотипных D-кортежей и записанное как ограниченная перевернутыми квадратными скобками матрица компонент, в которой строками являются участвующие в операции D-кортежи.

С помощью D-систем легко вычислять дополнение C-систем. Поскольку C-система есть объединение C-кортежей, то по закону де Моргана ее дополнение равно пересечению дополнений этих C-кортежей. Так как дополнения C-кортежей равны соответствующим D-кортежам, то для вычисления дополнения C-системы достаточно заменить в ней все компоненты их дополнениями, а вместо обычных квадратных скобок записать перевернутые. Например, дополнение C-системы $P[XYZ] = \begin{bmatrix} A & * & C \\ D & E & * \end{bmatrix}$ вычисляется как D-система $\overline{P}[XYZ] = \left]\begin{matrix} \overline{A} & \varnothing & \overline{C} \\ \overline{D} & \overline{E} & \varnothing \end{matrix}\right[$

В математической логике D-системе соответствует ***конъюнктивная нормальная форма*** (КНФ).

Универсум АК-объекта (***U***) определяется как ДП доменов атрибутов, заданных в его схеме отношения.

Например, для АК-объекта $R[XYZ]$ универсум есть $\boldsymbol{U} = X \times Y \times Z$. Если при вычислении установлено, что некоторая C-система равна универсуму, то она есть интерпретация ***общезначимой формулы*** или ***тавтологии***, если же некоторая D-система окажется равной пустому множеству, то она соответствует ***тождественно ложной формуле*** или ***противоречию***.

Операции с атрибутами (+*Atr* и –*Atr*) в АК соответствуют кванторным операциям в исчислении предикатов. Рассмотрим эти операции.

Операция ***добавление фиктивного атрибута*** (+*Atr*) выполняется как включение имени нового атрибута в схему отношения АК-объекта и соответствующего нового столбца с фиктивными компонентами – в матричное представление АК-объекта.

Например, пусть $R_k[XZ] = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{bmatrix}$. Тогда после добавления фиктивного атрибута Y в $R_k[XZ]$ получим АК-объект $+Y(R_k[XZ]) = R_m[XYZ] = \begin{bmatrix} A_1 & * & A_3 \\ B_1 & * & B_3 \end{bmatrix}$.

При выполнении операции +*Atr* в C-структуры добавляются фиктивные компоненты «*», а в D-структуры – фиктивные компоненты «∅».

Операция $+Atr$ соответствует правилу обобщения (Gen) (см. выше). Далее мы более подробно рассмотрим соотношение между правилом Gen в этой формулировке и операцией $+Atr$. Операция $+Atr$ используется также для приведения АК-объектов с разными схемами отношений к одной схеме отношения за счет добавления недостающих фиктивных атрибутов, что позволяет применять в АК обобщенные операции.

Обобщенные операции пересечения ($\cap_G$) и объединения ($\cup_G$) – это операции АК, отличающиеся от обычных одноименных операций алгебры множеств тем, что перед их выполнением, если это необходимо, АК-объекты приводятся к одной схеме отношения с помощью операции $+Atr$.

Обобщенные операции позволяют вычислять пересечение и объединение отношений с разными схемами отношений.

Обобщенные операции $\cap_G$ и $\cup_G$ семантически равносильны логическим связкам конъюнкции ($\wedge$) и дизъюнкции ($\vee$).

Аналогично вводятся ***обобщенные отношения*** ($\subseteq_G$ и $=_G$).

Рассмотрим соответствие между отношением $\subseteq_G$ и логической связкой $\supset$ (импликация). Пусть задана логическая формула $P \supset Q$, и интерпретациями формул P и Q являются АК-объекты P_T и Q_T. Тогда

формула $P \supset Q$ ***истинна, если и только есл***и $P_T \subseteq_G Q_T$.

Операция ***элиминации атрибута*** ($-Atr$) выполняется как удаление из схемы отношения имени этого атрибута, а из матричного представления – столбца его значений.

Логический смысл этой операции, в отличие от $+Atr$, уже зависит от типа АК-объекта (теоремы 31 и 32 в [Кулик, 2020]). Пусть задан АК-объект $P[\ldots X\ldots]$, который является интерпретацией логической формулы $F(\ldots x\ldots)$ со свободной переменной x. Тогда:

если P – C-кортеж или C-система, то $-X(P)$ – это интерпретация формулы $\exists x(F)$.

если P – D-кортеж или D-система, то $-X(P)$ – это интерпретация формулы $\forall x(F)$.

Проекцией АК-объекта называется результат однократного или многократного применения операции $-Atr$ к АК-объекту, выраженному как C-кортеж или C-система, при условии, что атрибут Atr содержится в схеме отношения.

Если, допустим, задана C-система $R[XYZ]$, то ее проекции обозначаются соответственно $Pr_{XY}(R)$, $Pr_Y(R)$, $Pr_{XZ}(R)$ и т.д. В частности, проекция $Pr_{XZ}(R)$ вычисляется путем элиминации атрибута Y: $Pr_{XZ}(R) = -Y(R[XYZ])$.

С помощью проекции можно проверить существование в C-системе неявно выраженного фиктивного атрибута. Пусть задана C-система $R[\boldsymbol{W}]$, где $\boldsymbol{W}$ – множество атрибутов, среди которых имеется атрибут X, и $Pr_{\boldsymbol{W}\setminus X}(R)$ – проекция АК объекта $R[\boldsymbol{W}]$, в которой присутствуют все атрибуты, кроме X.

Тогда X есть ***фиктивный атрибут*** в $R[\boldsymbol{W}]$, если соблюдается следующее равенство

$$R[\boldsymbol{W}] = +X(Pr_{\boldsymbol{W}\setminus X}(R)) \tag{1}$$

Равенство (1) означает, что в АК-объекте $R[\boldsymbol{W}]$ каждому элементарному кортежу из проекции $Pr_{W\setminus X}(R)$ соответствует множество всех значений атрибута X.

Доказано, что ***АК с обобщенными операциями и отношениями изоморфна алгебре множеств***.

2.5. Избранные теоремы алгебры кортежей

Номера теорем соответствуют номерам в [Кулик, 2020]. В формулировках теорем речь идет об однотипных АК-объектах, поэтому их схемы отношений в именах не указываются.

Теорема 1 (проверка включения однотипных C-кортежей). Пусть даны два однотипных C-кортежа $P = [P_1\ P_2 \ldots P_N]$ и $Q = [Q_1\ Q_2 \ldots Q_N]$. Тогда $P \subseteq Q$, если и только если $P_i \subseteq Q_i$ верно для всех соответствующих пар компонент сравниваемых C-кортежей.

Теорема 2 (пересечение однотипных C-кортежей). Пусть даны два однотипных C-кортежа $P = [P_1\ P_2\ \ldots\ P_N]$ и $Q = [Q_1\ Q_2\ \ldots\ Q_N]$. Тогда

$P \cap Q = [P_1 \cap Q_1\ P_2 \cap Q_2\ \ldots\ P_N \cap Q_N]$.

Теорема 3 (пустое пересечение однотипных C-кортежей). Пусть даны два однотипных C-кортежа $P = [P_1\ P_2\ \ldots\ P_N]$ и $Q = [Q_1\ Q_2\ \ldots\ Q_N]$, и в них имеется, по крайней мере, одна пара P_i и Q_i компонент, для которых $P_i \cap Q_i = \varnothing$. Тогда $P \cap Q = \varnothing$.

Теорема 8 (пересечение двух C-систем). Пусть даны однотипные C-системы P и Q. Результатом их пересечения будет C-система, содержащая все непустые пересечения каждого C-кортежа из P с каждым C-кортежем из Q.

Теорема 9. Дополнение C-кортежа $P = [P_1\ P_2\ \ldots\ P_{n\text{-}1}\ P_n]$ есть диагональная C-система $R = \begin{bmatrix} \overline{P_1} & * & \ldots & * \\ * & \overline{P_2} & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ * & * & \ldots & \overline{P_n} \end{bmatrix}$ размерности $n \times n$, где каждая диагональная компонента – дополнение соответствующей компоненты C-кортежа P.

Теорема 20 (проверка включения однотипных C-кортежа в D-кортеж). Для C-кортежа $P = [P_1\ P_2\ \ldots\ P_n]$ и D-кортежа $Q =]Q_1\ Q_2\ \ldots\ Q_n[$ справедливо $P \subseteq Q$, если и только если по крайней мере для одного i соблюдается $P_i \subseteq Q_i$.

Теорема 25 (преобразование D-системы в C-систему)**.** D-система P, содержащая m D-кортежей, эквивалентна C-системе, которая является пересечением m C-систем, полученных с помощью преобразования каждого D-кортежа из P в диагональную C-систему.

Теорема 27 (ортогонализация)**.** D-кортеж вида $]Q_1\ Q_2\ \ldots\ Q_{m\text{-}1}\ Q_m[$ преобразуется в эквивалентную ему ортогональную C-систему:

$$\begin{bmatrix} Q_1 & * & \ldots & * & * \\ \overline{Q_1} & Q_2 & \ldots & * & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overline{Q_1} & \overline{Q_2} & \ldots & Q_{m-1} & * \\ \overline{Q_1} & \overline{Q_2} & \ldots & \overline{Q_{m-1}} & Q_m \end{bmatrix}.$$

Теорема 31 ($\exists$-квантификация)**.** Если C-кортеж или C-система $R[\ldots X\ldots]$ – интерпретация логической формулы $A(\ldots, x, \ldots)$ со свободной переменной x, то АК-объект $-X(R[\ldots X\ldots])$ – интерпретация логической формулы $\exists x(A(\ldots, x, \ldots))$.

Теорема 32 ($\forall$-квантификация)**.** Если D-кортеж или D-система $R[\ldots X\ldots]$ – интерпретация логической формулы $A(\ldots, x, \ldots)$ со свободной переменной x, то АК-объект $-X(R[\ldots X\ldots])$ – интерпретация логической формулы $\forall x(A(\ldots, x, \ldots))$.

2.6. Интерпретация логического вывода

В АК предложен и обоснован новый метод проверки правильности следствия. Пусть интерпретации посылок рассуждения – это АК-объекты $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Тогда логическая формула, интерпретируемая АК-объектом B, будет следствием этих посылок, если и только если соблюдается соотношение:

$$(A_1 \cap_G \ldots \cap_G A_n) \subseteq_G B. \tag{2}$$

АК-объект, полученный в результате вычисления выражения в левой части (2), называется в АК ***минимальным следствием***. Минимальное оно потому, что любое его строгое подмножество не является следствием.

Пример 3. Соотношение (2), в частности, можно использовать при решении задачи из [Чень, Ли, 1983]: «Некоторые пациенты любят всех докторов. Ни один пациент не любит знахарей. Следовательно, никакой доктор не является знахарем».

В [Чень, Ли, 1983] эта задача решается двумя способами: сначала с помощью интерпретации (пример 3.15), затем методом резолюций с использованием алгоритма унификации (пример 5.21). Посмотрим, как эту задачу можно решить с помощью АК.

Пусть заданы множества P – пациенты, D – доктора, Q – знахари, $P_1 \subseteq P$ – некоторые пациенты, $L[XY]$ – отношение «x любит y», заданное как C-система. Пусть она нам неизвестна, но в данном случае это неважно.

Тогда первая посылка: $A_1[XY] = [P_1\ \ D]$.

Вторая посылка: $A_2[XY] = L[XY] \cap [P\ \ \overline{Q}\,]$ (при пересечении образуется C-система, в которой из атрибута X исключены все не пациенты, а из атрибута Y – все знахари).

Вычисляем минимальное следствие:

$A[XY] = A_1[XY] \cap A_2[XY] = [P_1\ \ D] \cap (L[XY] \cap [P\ \ \overline{Q}\,]) = L[XY] \cap [P_1\ \ D \cap \overline{Q}\,]$.

Анализируем заключение. Предположим противное, т.е. что некоторые доктора – знахари, т.е. $D \cap Q = Q_1 \neq \varnothing$. Множество Q_1 может присутствовать в каждом из атрибутов отношения $L[XY]$, поэтому в качестве отрицания заключения мы выбираем C-кортеж $[Q_1\ Q_1]$ и вычисляем его пересечение с минимальным следствием:

$A[XY] \cap [Q_1\ Q_1] = L[XY] \cap [P_1 \cap Q_1\ D \cap \overline{Q} \cap Q_1]$.

Поскольку $\overline{Q} \cap Q_1 = \varnothing$, то $[P_1 \cap Q_1\ D \cap \overline{Q} \cap Q_1] = \varnothing$ (Теорема 3) и, следовательно, $A[XY] \cap [Q_1\ Q_1] = \varnothing$. Отсюда ясно, что заключение корректно.

Рассмотрим, в чем заключается разница между операцией $+Atr$ и правилом вывода Gen (из $\mathcal{B}$ следует $(\forall x)\mathcal{B}$). Дело в том, что в АК фиктивный атрибут X добавляется в АК-объект при условии, что X отсутствует в его схеме отношения. Это означает, что при добавлении фиктивного атрибута исходный объект никак не изменяется – просто добавляется новый атрибут, который может принимать любые значения независимо от значений других атрибутов.

В исчислении предикатов при интерпретации формулы $(\forall x)\mathcal{B}$ возможны две разные ситуации. Первая – когда в формуле $\mathcal{B}$ нет свободной переменной x. Тогда интерпретацией формулы $(\forall x)\mathcal{B}$ является добавление фиктивного атрибута X к интерпретации формулы $\mathcal{B}$.

Вторая ситуация – когда в формуле $\mathcal{B}$ имеется свободная переменная x. Пусть интерпретацией формулы $\mathcal{B}$ является отношение $B[\mathbf{W}]$, в схеме отношения которого содержится атрибут X. Рассмотрим проекцию $Pr_{\mathbf{W}\setminus X}(B)$ этого отношения, в которой присутствуют все атрибуты, кроме X. В этой проекции каждому элементарному кортежу соответствует некоторое множество значений атрибута X в $B[\mathbf{W}]$. Если в $Pr_{\mathbf{W}\setminus X}(B)$ существуют элементарные кортежи (например, $t_i, t_j, \ldots, t_k$), которым соответствуют все элементы домена атрибута X, то множество $\{t_i, t_j, \ldots, t_k\}$ – это отношение, равное интерпретации формулы $(\forall x_i)\mathcal{B}$. Если в $Pr_{\mathbf{W}\setminus X}(B)$ отсутствуют элементарные кортежи, которым соответствуют все элементы домена атрибута X, то интерпретацией формулы $(\forall x)\mathcal{B}$ является пустое множество, что означает $(\forall x)\mathcal{B}$ = False. Если же всем элементарным кортежам из $Pr_{\mathbf{W}\setminus X}(B)$ соответствуют домены атрибута X, то X – фиктивный атрибут в $B[\mathbf{W}]$.

Таким образом, в случаях, когда формуле $(\forall x)\mathcal{B}$ соответствует отношение $B_1[\mathbf{W}\setminus X]$, являющееся строгим подмножеством $Pr_{\mathbf{W}\setminus X}(B)$, т.е. когда X не фиктивный атрибут в $B[\mathbf{W}]$, то импликация $\mathcal{B} \supset (\forall x)\mathcal{B}$ не является истинной, так как в $(\forall x)\mathcal{B}$ сокращается или полностью вырождается множество выполняющих подстановок $\mathcal{B}$. Это означает, что правило Gen в исчислении предикатов должно быть дополнено следующим предложением: «при условии, что переменная x не свободна в $\mathcal{B}$ или, если она свободна в $\mathcal{B}$, то она соответствует фиктивному атрибуту в интерпретации $\mathcal{B}$».

Эту неточность в формулировке правила Gen в книге Мендельсона трудно объяснить, тем более что известна другая формулировка правила Gen (другое название – *правило Бернайса*) [Клини, 1973], которая не требует корректировки.

Еще один источник ошибок в логическом анализе на основе исчисления предикатов – это отсутствие понятия, аналогичного термину «схема отношения». В частности, в алгоритме унификации допускается замена переменных в подстановках [Чень, Ли, 1983]. Для отношений и АК-объектов, которые являются интерпретациями предикатов и формул, это означает замену атрибута в схеме отношения и, соответственно, переход в другое пространство даже в том случае, если домены этих атрибутов одинаковы. Например, АК-объект $P[XY]$ при пересечении с самим собой не изменяется, но если в нем заменить имена атрибутов, например, $P[YZ]$, то обобщенное пересечение $P[XY] \cap_G P[YZ]$ означает *операцию соединения* отношений.

Другой пример: интерпретация формулы $A(x) \wedge B(x)$ – это пересечение интерпретаций одноместных предикатов $A(x)$ и $B(x)$, в то время как интерпретацией формулы $A(x) \wedge B(y)$ оказывается декартово произведение интерпретаций предикатов $A(x)$ и $B(y)$.

Таким образом, интерпретации формул при переименовании переменных существенно изменяются, что в некоторых случаях не принимается во внимание при замене переменных в алгоритме унификации.

2.7. Позитивные результаты интерпретации

1. Исследования показали, что, помимо логического анализа, алгебру кортежей можно использовать в следующих областях дискретной математики и информационных технологий: 1) реляционные модели; 2) графы и сети; 3) системы искусственного интеллекта (экспертные системы, семантические сети, фреймы, онтологии); 4) логико-вероятностные методы, включая вероятностную логику; 5) дискретные автоматы; 6) задачи удовлетворения ограничений (Constraint Satisfaction Problem – CSP); 7) модели вопросно-ответных систем; 8) при машинной реализации – сокращение трудоемкости алгоритмов решения сложных задач логического анализа за счет специфических свойств АК, а также за счет возможности эффективного распараллеливания алгоритмов [Кулик и др., 2010; Кулик, 2020; Kulik, Fridman, 2022].

2. С помощью средств математической логики трудно, а иногда просто невозможно применять многие необходимые в естественных рассуждениях методы логического анализа, такие как формулирование и проверка гипотез, анализ неопределенностей, распознавание и анализ ошибок и некорректностей в рассуждениях, вывод абдуктивных заключений, анализ пресуппозиций и т.д. В то же время эти задачи решаются с помощью алгебры кортежей [Кулик и др., 2010; Кулик, 2019; Кулик, 2020].

3. С помощью исчисления предикатов можно решать лишь часть задач дедуктивного анализа, т.е. поиск доказательств теорем, в случае если их формулировки известны. Однако задача поиска следствий с заранее заданными свойствами в этой системе не решается, что стало возможным с помощью алгебры кортежей [Кулик, 2020, Кулик, 2021].

2.8. Нерешенные проблемы

1. Задача Steamroller (№ 47 в [Pelletier, 1986]), которая выражается на языке исчисления предикатов, является иллюстрацией сложности логического вывода. Предполагается, что ее формулировка на языке АК позволит упростить ее решение. Однако до настоящего времени такая формулировка не найдена. Также отсутствует обоснование того, что этого нельзя сделать.

2. Не рассмотрена интерпретация и область ее применения для функциональных символов.

3. Не исследована возможность замены универсума Эрбрана [Чень, Ли, 1983] более простым вариантом на основе алгебры кортежей.

4. Не исследована возможность интерпретации теоремы Геделя о неполноте.

Список можно продолжить.

Список использованной литературы

1. *Бочаров, В. А., Маркин В.И.* Введение в логику. М. : Форум ; ИНФРЛ-М, 2008.
2. *Бурбаки Н.* Теория множеств. Книга 1. Основные структуры анализа. М.: Мир, 1965.
3. *Вагин, В. Н. и др.* Достоверный и правдоподобный вывод в интеллектуальных системах / под ред. В. Н. Вагина, Д. А. Поспелова. - 2-е изд. испр. и доп. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. - 712 с.
4. *Гетманова А.Д.* Учебник логики. 8- изд., перераб. М.: КНОРУС, 2011.
5. *Клини С. К.* Математическая логика. М.: Мир, 1973.
6. *Кулик Б.А.* Новые классы КНФ, с полиномиально распознаваемым свойством выполнимости // Автоматика и телемеханика. 1995. № 2. С. 111-124.
7. *Кулик Б.А.* Логика естественных рассуждений. СПб,: Невский диалект, 2001.
8. *Кулик, Б. А.* Логический анализ систем на основе алгебраического подхода. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Санкт-Петербург, 2007. 291 с.
9. *Кулик Б.А., Зуенко А.А., Фридман А.Я.* Алгебраический подход к интеллектуальной обработке данных и знаний. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010.
10. *Кулик Б.А.* Исследование противоречий в естественных рассуждениях на примерах метафор и пресуппозиций // Труды Семнадцатой Национальной конференции по искусственному интеллекту с международным участием. КИИ-2019 (21–25 октября 2019 г., г. Ульяновск, Россия). Ульяновск: УлГТУ, 2019. Т. 2. С. 192-200.
11. *Кулик Б.А.* Вывод следствий с предварительно заданными свойствами // Системный анализ в проектировании и управлении. В 3 ч. Ч.2: сб. научных трудов XXV Международной научной и учебно-практической конференции, 13-14 октября 2021 г. – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2021. Часть 2. С. 89-97.
12. *Кулик Б.А.* Логика и математика: просто о сложных методах логического анализа. СПб.: Политехника, 2020.
13. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? 3-е изд., испр. и доп. М.: МЦНМО, 2001.
14. *Лукасевич Я.* Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
15. *Поспелов Д. А.* Моделирование рассуждений. Опыт анализа мыслительных актов. М.: Радио и связь, 1989.
16. *Пуанкаре А.* О науке. М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 736 с.
17. *Справочная книга* по математической логике: В 4-х частях / Под ред. Дж. Барвайса. Ч. 2. Теория множеств: Пер. с англ. - М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 370 с.
18. *Стяжкин Н. И.* Формирование математической логики. М.: Наука, 1967.
19. *Чень Ч., Ли Р.* Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. – М., Наука. 1983.
20. *Шалак В.И.* Анализ vs дедукция // Логические исследования. 2018. т. 24, № 1. С. 26-45.
21. *Эйлер Л.* Письма к немецкой принцессе о разных физических и философских материях. СПб.: Наука, 2002.
22. *Copi, I. M., Cohen, C. and McMahon, K.* Introduction to Logic. London: Routledge, 2016.
23. *Kulik B., Fridman A.* Complicated Methods of Logical Analysis Based on Simple Mathematics. Cambridge Scholars Publishing, 2022.
24. *Mendelson, E.* Introduction to Mathematical Logic. Boca Raton, London, New York: Taylor & Francis Group, 2015 (6th ed.). 499 pp.
25. *Pelletier, F.J.* Seventy-Five Problems for Testing Automatic Theorem Provers // Journal of Automated Reasoning, 1986, Vol. 2, pp. 191-216.