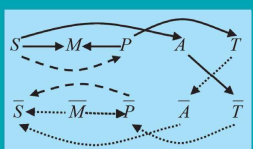
Б. А. Кулик

ЛОГИКА И МАТЕМАТИКА

просто о сложных методах логического анализа

с. Хайрюзово (Камчатка) основано в 1746 г. Здесь тоже рождаются математики



$$\left]\begin{array}{ccc} \{c\} & \{g\} & \{a,c\} \\ \{a,d\} & \varnothing & \{b\} \end{array}\right[$$

$$\begin{bmatrix} \{1\} & \{0\} & \{1\} \\ * & \{1\} & \{1\} \end{bmatrix}$$

Борис Александрович КУЛИК, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института проблем машиноведения РАН. Родился в 1941 году в селе Хайрюзово, Камчатской области. Учился в средней школе № 32 в городе Ростове-на-Дону. Окончил Ленинградский горный институт (геологоразведочный факультет). После учебы в институте и службы в армии более 20 лет работал в производственных и научно-исследовательских организациях Министерства геологии СССР. В отраслевой науке занимался математическим моделированием процессов разведочного бурения, анализом надежности бурового инструмента и оборудования.

С 1988 года круг его научных интересов составляют исследования в области философии, логики и математики. С 1997 года работает в Институте проблем машиноведения РАН. Многократно выступал на международных и российских научных конференциях по логике, искусственному интеллекту, системному анализу, безопасности и риску. В 2008 году защитил в Санкт-Петербургском государственном университете докторскую диссертацию «Логический анализ систем на основе алгебраического подхода». Опубликовал более 120 научных работ, в том числе 6 монографий.

Б. А. Кулик

ЛОГИКА И МАТЕМАТИКА

просто о сложных методах логического анализа

Под общей редакцией А. Я. Фридмана

ПОЛИТЕХНИКА
ИЗДАТЕЛЬСТВО
Санкт-Петербург 2020

УДК 510.16
ББК 22.12
К90

Рецензент: заведующий лабораторией, главный научный сотрудник Санкт-Петербургского федерального исследовательского центра РАН, доктор технических наук, профессор, Заслуженный деятель науки РФ ***Б. В. Соколов***

Научный редактор: доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института информатики и математического моделирования КНЦ РАН (Апатиты) ***А. Я. Фридман***

Кулик, Б. А.

К90 Логика и математика: просто о сложных методах логического анализа / Б. А. Кулик; под общ. ред. А. Я. Фридмана. — СПб. : Политехника, 2020. — 141 с. : ил.

DOI: 10.25960/7325-1166-6
ISBN 978-5-7325-1166-6

В книге в доступной форме представлено многообразие методов логического анализа: дедуктивные рассуждения, формирование и проверка корректности гипотез, логический анализ в условиях ограничений, абдуктивные заключения. В качестве теоретической основы используются предложенные автором математические системы — *E*-структуры и алгебра кортежей, позволяющие моделировать различные типы рассуждений и решать логические задачи без применения неклассических логик. В основе книги лежит курс лекций, прочитанных автором в Санкт-Петербургском университете культуры и искусств. Предназначена для широкого круга читателей, интересующихся логикой, преподавателей и специалистов.

УДК 510.16
ББК 22.12

DOI: 10.25960/7325-1166-6
ISBN 978-5-7325-1166-6

Оглавление

Предисловие

Жизнь так устроена, что мы постоянно вынуждены в чем-то убеждать друг друга, побуждать собеседника к каким-то действиям, обосновывать целесообразность своих поступков или своего бездействия. Подобное происходит не только в быту, но и во многих других сферах человеческой деятельности: науке, производстве, политике и т. д. Побуждают иногда силой, угрозами – это к логике не имеет отношения. Часто убеждают собеседника с помощью обмана, психологического воздействия или «нейролингвистического программирования». Это тоже не логика. Имеется замечательная книга С.И. Поварнина [1], в которой подробно и увлекательно рассказано об уловках в споре с целью сбить с толку собеседника.

В то же время обман во многих случаях можно распознать с помощью логического анализа. И в житейской практике логика нужна каждому человеку, хотя бы для того, чтобы не стать жертвой словесных манипуляций и уметь критически анализировать свои заблуждения, причиняющие нам крупные или мелкие неприятности.

Наверное, невозможно найти человека, который никогда не допускал бы логических ошибок в своих рассуждениях. Когда-то основы логики преподавали в школах и гимназиях, а анализ логических ошибок в рассуждениях оппонентов играл немалую роль в науке и образовании. Но в XX столетии роль логики в общечеловеческой культуре заметно потускнела. В настоящее время специалисты по логике в основном занимаются изобретением или исследованием многочисленных «экзотических» логик, в результате суть логики перестала быть понятной для многих.

Существует много людей, которым интересно знать, что такое логика и для чего она нужна. Ответов на этот вопрос немало, мне больше нравится такой: ***логика – это важнейшая составляющая общечеловеческой культуры, ее основное назначение состоит в разработке корректных методов анализа правильности рассуждений и обоснований.***

Корректность методов логического анализа в настоящее время трактуется неоднозначно. Многие считают, что методы логического анализа корректны в силу того, что они проверены многовековой практикой применения логики. Для логики, являющейся фундаментом познавательных способностей человека, такой «эмпирический» критерий явно недостаточен. Здесь мы будем использовать другую точку зрения: ***логические***

методы корректны в той мере, в какой они математически обоснованы.

Среди специалистов по логике до сих пор идут дискуссии о том, как преподавать логику. В основном эти дискуссии вращаются вокруг проблемы соотношения логики и математики. Сейчас многие математики считают, что в основе логики и всей математики в целом лежит искусственный язык, в который вводятся некоторые символы, обозначающие переменные, константы, функции, предикаты, логические связки, скобки и знаки препинания. Для этих символов сформулированы способы построения правильных предложений и их преобразования в другие правильные предложения. Такой подход начал становиться популярным среди математиков на рубеже XIX и XX столетий, он называется *теорией формальных систем* (ТФС). Используется и другое название: *аксиоматический метод*. Примеры изложения некоторых важных разделов логики и математики под влиянием этого подхода можно найти в публикациях [2, 3].

С точки зрения преподавания логики, этот подход имеет ряд недостатков: он трудно усваивается учащимися и плохо приспособлен для анализа естественных рассуждений и решения логических задач. К тому же, с точки зрения ТФС классическая и неклассические логики имеют равные права на существование, и вопрос о том, какая логика «правильная», среди специалистов практически не обсуждается.

В предлагаемой здесь методике, основные положения которой опубликованы в научных изданиях [4 – 7], излагается иной подход, в котором основные логические соотношения и способы логического анализа основаны на простых математических структурах. Это позволяет использовать при анализе рассуждений несложные методы, подобные вычислениям и, кроме того, дает возможность учащимся освоить некоторые основополагающие понятия современной математики, используемые в настоящее время не только в логике, но и во многих других областях, включая информационные технологии.

В первой части книги рассмотрены методы анализа рассуждений в рамках *силлогистики*, созданной в IV веке до н. э. древнегреческим философом Аристотелем. Толчком для разработки предлагаемых здесь методов анализа силлогизмов (рассуждений с двумя посылками) и полисиллогизмов (рассуждений с произвольным числом посылок) стало знакомство автора с замечательной книгой Льюиса Кэрролла[1] «История с узелками» [8], в которой анализу естественных рассуждений посвящен большой раздел «Символическая логика». И хотя математические методы анализа, использованные тогда Кэрроллом, устарели, и вместо них здесь предлагаются более современные методы, некоторые незаслуженно забытые идеи Л. Кэрролла легли в основу нового подхода.

Важно отметить, что полисиллогистика не охватывает всех методов, применяющихся в настоящее время для анализа рассуждений. Другие, подчас намного более сложные, методы логического анализа были строго обоснованы в рамках математической логики, которая начала бурно развиваться с середины XIX века. Однако рассуждения в виде силлогизмов весьма часто используются в повседневной практике [9]. К тому же подробное рассмотрение полисиллогистики – не только дань уважения к системе рассуждений, просуществовавшей более двух тысячелетий, но и возможность проследить тесные связи между математикой и логикой.

Более емкие по своим аналитическим возможностям методы анализа рассуждений изложены в следующем разделе «Алгебра кортежей и логика». Эти методы часто используются и в математической логике, и в системах искусственного интеллекта.

Предложенные в первой части «Полисиллогистика» методы анализа рассуждений имеют по сравнению с традиционной силлогистикой следующие преимущества:

1) в них отсутствуют ошибки традиционной силлогистики;

2) с их помощью легко анализируются произвольные множества суждений;

3) они позволяют анализировать логические некорректности и осуществлять проверку гипотез;

4) они дают возможность восстанавливать пропущенные посылки (абдуктивное заключение).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) (проекты №№ 18-07-00132, 18-01-00076, 18-29-03022 и 19-08-00079).

---

[1] Льюис Кэрролл – литературный псевдоним английского математика и логика Ч.Л. Доджсона (C.L. Dodgson).

Часть I. Полисиллогистика

1. Суждение

В основе логики лежит структура, которая называется «суждение». Это понятие было разработано Аристотелем (384-322 гг. до н. э.). Он создал систему анализа рассуждений, известную в настоящее время как *силлогистика*.

В общем случае ***суждение*** – это выраженное в определенной форме высказывание, в котором сформулирован какой-то фрагмент наших знаний, представлений или мнений об окружающем мире (например, «Некоторые грибы ядовиты»). В Аристотелевой силлогистике каждое суждение состоит из двух частей – «субъекта» и «предиката». Логический смысл суждения заключается в том, что «предикат» рассматривается как присущий данному «субъекту» признак или условие его существования. «Предикат» может быть выражен и в отрицательной форме (например, «Пингвин *не летает*»). «Субъект» суждения обычно сопровождается логическими «префиксами» (в логике они называются ***кванторами***): «все» или «некоторые». В Аристотелевой силлогистике, как правило, отрицание к «субъектам» не применяется и используется только для предикатов, а кванторы применяются только к «субъектам».

В нашем подходе будем использовать суждение в более широком смысле. Во-первых, в одном суждении может быть более одного «предиката» и, во-вторых, в суждениях разрешается использовать отрицание не только для «предикатов», но и для «субъектов» – такое допущение, кстати, используется и в «Символической логике» Л. Кэрролла [8].

В традиционной силлогистике предусмотрено только четыре формы суждения: «Все A есть B», «Все A не есть B», «Некоторые A есть B» и «Некоторые A не есть B». Эти формы (или типы) были выделены еще Аристотелем. Они соответствуют обычным предложениям, выражающим отношения между частью и целым, видом и родом, объектом и свойством. Если внимательно присмотреться к предложениям естественного языка, окажется, что многие из них удается без потери смысла представить в виде таких суждений. Можно сказать, что грамматическая и смысловая структура предложения, сформированная в течение многих тысячелетий существования человечества, воплотилась в логическом суждении.

Значительная часть предложений в нашей речи состоит из подлежащего и сказуемого. К ним часто добавляются второстепенные члены предложения (определения, дополнения, обстоятельства места, времени и т. д.). В такой общепринятой грамматической форме выражаются многие предложения в житейских разговорах, литературных произведениях, а также в философских и научных рассуждениях на всех национальных языках. В лингвистике известно немало подходов к анализу структуры предложения. Мы здесь рассмотрим вариант, в котором выделяются три основных структурных элемента простого предложения: подлежащее, определение и сказуемое вместе с дополнениями и обстоятельствами, которые находятся под его управлением (например, «родился в Курске», «оказался не у дел», «приедет во вторник», «является представителем фирмы IBM» и т. д.).

При анализе логической формы суждения подлежащее часто можно рассматривать как субъект суждения. Предикаты суждения – это конструкции, состоящие из сказуемых с управляемыми ими обстоятельствами или дополнениями. Например, в предложении «Кенгуру живут в Австралии» субъектом является кенгуру как один из видов животных, а предикатом – существа, живущие в Австралии.

Сложнее в этом аспекте решается вопрос с определениями, которые в языке выражаются прилагательными, придаточными предложениями или же причастными оборотами. Обычно они ограничивают объем подлежащего, т. е. выделяют только часть объекта, обозначенного подлежащим, например, «черные лебеди».

В то же время в предложениях естественного языка возможны относящиеся к подлежащему определения, представляющие собой отдельные предикаты. Примером может служить предложение «Онегин, добрый мой приятель, родился на брегах Невы». Здесь по смыслу ясно, что определение «добрый мой приятель» характеризует не какую-то часть «Онегина», а его неотъемлемую характеристику (по крайней мере, в тот момент, когда это предложение было высказано). Отсюда следует, что в данном предложении можно выделить два предиката: «добрый мой приятель» и «родился на брегах Невы».

Заметим, что в форме суждения возможно выразить не только многие предложения естественного языка, но и такие логические конструкции, как определения или толкования терминов; факты реальной жизни; многие математические теоремы; законы природы и т. д. Каждый предикат суждения есть необходимый признак или необходимое условие существования субъекта.

Соотношения между субъектами и предикатами, а также методы анализа рассуждений легко представить с помощью математической системы, носящей название ***алгебры множеств***.

2. Основные понятия алгебры множеств

Алгебра множеств лежит в основе многих разделов современной математики. Для нее практически невозможно установить точную дату открытия и назвать имя первооткрывателя. Алгебра множеств постепенно развивалась на фоне многочисленных попыток найти строгое математическое основание Аристотелевой логики. Некоторые предпосылки этой алгебры содержатся в трудах Лейбница, в ее основах есть значительный вклад многих известных логиков и математиков (Л. Эйлера, Ж. Д. Жергонна, А. де Моргана, Дж. Венна и др.) [10].

Среди разделов математики алгебра множеств оказывается намного более простой, чем, допустим, геометрия, дифференциальное и интегральное исчисление, однако в завершенном виде она была выражена лишь во второй половине XIX столетия, т. е. намного позже, чем многие, подчас весьма сложные области математики.

О многовековой истории взаимодействия логики и математики подробно написано в книге [10]. Одним из ключевых событий этой истории стала книга Эйлера [11], в которой он в популярной форме изложил свое понимание Аристотелевой силлогистики. При этом использовались наглядные схемы, которые впоследствии получили название «круги Эйлера». В дальнейшем круги Эйлера стали применять не только в учебных курсах по логике, но также и при изложении азов многих основополагающих разделов современной математики, где используется алгебра множеств (например, в [12]). Здесь мы также будем применять эти наглядные отображения, позволяющие достаточно быстро овладеть абстрактными понятиями алгебры множеств.

Идеи Эйлера были развиты в работах французского астронома и математика Ж. Д. Жергонна. Ему удалось в опубликованной в 1817 г. работе «Основы рациональной диалектики» представить все классы суждений, выделенных Аристотелем, с помощью соотношений между множествами. Эти соотношения получили название «Жергонновы отношения» [10]. Рассмотрим их более подробно.

В основе силлогистики лежат простые суждения, представленные четырьмя типами:

A – общеутвердительное (все X есть Y);

E – общеотрицательное (все X не есть Y);

I – частноутвердительное (некоторые X есть Y);

O – частноотрицательное (некоторые X не есть Y).

Термины X и Y можно отобразить как некоторые совокупности (множества, классы) в виде кругов Эйлера. Жергонн выделил пять возможных соотношений между ними (рис. 1).

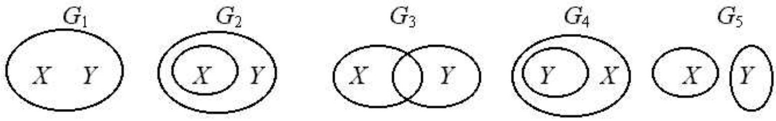


Рис. 1

Каждый тип Жергонновых отношений имеет собственное название:

G_1 – совпадение или равнозначность;

G_2 – левостороннее включение;

G_3 – частное совпадение;

G_4 – правостороннее включение;

G_5 – несовместимость.

Жергонн показал, что каждый тип Аристотелевского суждения соответствует некоторым типам этих отношений, в частности:

- типу **A** соответствует G_1 или G_2;
- типу **E** соответствует G_5;
- типу **I** соответствует G_1 или G_2 или G_3 или G_4;
- типу **O** соответствует G_3 или G_4 или G_5.

Например, суждение типа **I** означает, что некоторая непустая часть множества или класса X содержится в Y. Посмотрев на рисунок, нетрудно убедиться, что этому условию удовлетворяют все типы Жергонновых отношений, кроме G_5. В логике слово «некоторые» используется в широком смысле: «хотя бы один, но не исключено, что и все». Точный синоним понятия «некоторые» – термин «существует».

Жергонновы отношения часто использовались для строгого обоснования не только правил вывода из простых силлогизмов, где в качестве посылок используются только два суждения, но и для более сложных умозаключений, когда посылки могут включать произвольное число суждений – в этом случае мы имеем дело с полисиллогизмами. Вершиной анализа такого рода можно считать работы английского логика и философа Дж. Венна (1834–1923) [10].

Однако анализировать рассуждения с помощью Жергонновых отношений не всегда просто. Главная трудность состоит в том, что практически для всех типов суждений (за исключением типа **E**) нужно использовать несколько вариантов Жергонновых отношений, и при увеличении количества исходных суждений число возможных вариантов анализа возрастает лавинообразно. Если мы, допустим, анализируем сложное рассуждение, содержащее много суждений, то для каждого суждения необходимо просмотреть все соответствующие ему варианты Жергонновых отношений. Далее мы изучим намного более простые способы анализа рассуждений, также основанные на законах алгебры множеств.

С точки зрения современной математики ***алгебра множеств*** относится к классу ***алгебраических систем***, т. е. структур, в которых имеются (даны):

1) ***носитель*** – совокупность объектов (например, числа, символы, геометрические фигуры, множества и т. д.);
2) совокупность ***отношений*** (например: больше, меньше, равно и т. д.);
3) совокупность ***операций*** (например, сложение, умножение, пересечение и т. д.);
4) основные ***законы***, связывающие отношения и операции (например, неизменность результата умножения двух чисел при перестановке сомножителей).

Заметим, что смысловая разница между отношением и операцией заключается в следующем: если задано некоторое отношение между объектами, то о нем можно только сказать, истинно оно для данных объектов или нет (например, отношение «$2 > 3$» ложно), в то время как в результате какой-либо операции с объектами получается новый объект (например, «$2 + 3 = 5$»).

В алгебре множеств ***носителем*** является некоторая совокупность множеств. Основными понятиями алгебры множеств считаются ***множество*** и ***элемент***. Соотношение между ними называется ***отношением принадлежности*** и обозначается знаком «$\in$». Запись $b \in A$ переводится с символического языка как «b есть элемент множества A» или «элемент b принадлежит множеству A». Если все элементы множества можно перечислить (например, оно состоит из элементов a, b и c), то общепринятой является такая запись множества:

$A = \{a, b, c\}$.

Элементы множества принято заключать в *фигурные скобки*.

Множества можно задать двумя способами: с помощью *формулировки характерных признаков* (например, множество K содержит только неотрицательные четные числа, не превышающие 8) или с помощью *перечисления элементов* (например, $K = \{0, 2, 4, 6, 8\}$).

В современной математике пока что нет четкого определения отношения принадлежности. Считается, что элементом может быть любой объект, в том числе и множество. Такое допущение служит источником парадоксов, эти парадоксы были открыты на рубеже XIX и XX столетий, и с тех пор на эту тему не утихают дискуссии. Здесь мы будем придерживаться точки зрения, в которой отношение принадлежности связывает два *разных* типа объектов («элемент» $\in$ «множество»), но ни в коем случае не должно быть связи типа «множество» $\in$ «множество». Тогда неопределенностей и парадоксов не возникает.

Между множествами устанавливается другое, на первый взгляд, похожее, но, в то же время, принципиально отличающееся отношение – ***включение***, структурные свойства которого в современной математике определены достаточно четко и однозначно. Рассмотрим его более подробно. Допускаются два разных варианта этого отношения:

«$\subset$» – строго включено;

«$\subseteq$» – включено или равно.

Запись $A \subset B$ означает, что множество A включено во множество B, т. е. *все элементы множества A одновременно есть элементы множества B,* но равенство этих множеств невозможно. Например, «рыбы» включены в «животные», но не равны им. Запись $A \subseteq B$ означает, что множество A включено в множество B, но не исключается, что они могут быть равными. Изображение отношения строгого включения ($A \subset B$) с помощью кругов Эйлера показано на рис. 2.

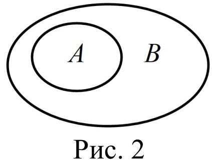


Рис. 2

В данном случае не обязательно использовать правильные круги. Множества можно изобразить любой замкнутой фигурой.

Если множества заданы с помощью перечисления элементов, то отношение включения (или невключения) одного множества в другое множество легко установить путем сравнения элементов этих множеств. Например, если заданы три множества

$P = \{a, b, c, d, e\}$; $Q = \{b, d, a\}$; $R = \{a, c, f\}$,

то, сравнивая их элементы, можно доказать, что $Q \subset P$, но в то же время отношение $R \subset P$ для этих множеств неверно, так как элемент f из множества R не принадлежит множеству P. Для множеств с большим или бесконечным числом элементов отношение включения иногда можно обосновать. Например, сравнительно легко доказывается, что бесконечное множество всех чисел, кратных 6, строго включено в бесконечное множество всех четных чисел.

Порядок перечисления элементов для множеств несущественен. Например, множества $\{b, d, a\}$; $\{a, b, d\}$; $\{d, a, b\}$ – это по сути одно и то же множество. Если же порядок перечисления множеств имеет значение, то получаем не множества, а *последовательности* или ***упорядоченные множества*** (некоторые сведения о них приведены ниже). Математические свойства последовательностей существенно отличаются от математических свойств множеств.

Различие отношений принадлежности и включения можно иллюстрировать следующим примером. Допустим, имеется запись $a \in P$. Из нее следует, что a есть элемент, а P – множество. Возможно ли в этом случае записать $a \subseteq P$? Оказывается, нельзя, потому что отношение включения применимо только для двух множеств. Правильной в этом случае будет запись $\{a\} \subseteq P$, в которой слева записан не элемент, а *одноэлементное множество*.

Рассмотрим еще одно отношение между множествами – отношение ***равенства***. Множества равны, если у них одни и те же элементы. Для доказательства равенства двух множеств, особенно в тех случаях, когда у них большое или бесконечное число элементов, используется следующее утверждение.

Множества A и B ***равны***, если справедливо как $A \subseteq B$, так и $B \subseteq A$.

Заметим, что в математике это утверждение – доказанная теорема. Если множества связаны отношениями $A \subset B$ или $A \subseteq B$, то множество A называют ***подмножеством*** множества B. Среди всех возможных подмножеств произвольного множества A обязательно содержится также и само множество A. Другими словами, для любого множества A всегда справедливо $A \subseteq A$.

В алгебре множеств особо выделяется и часто используется множество, которое называется «пустое множество» (обозначается «$\varnothing$»). Интуитивно ***пустое множество*** означает множество, не содержащее никаких элементов. Но это интуитивное определение не раскрывает полностью его сути и роли в алгебре множеств. Свойства пустого множества станут более понятными, когда мы рассмотрим операции алгебры множеств.

Если множество задано перечислением элементов, то можно записать *совокупность всех подмножеств* этого множества. Например, для множества $A = \{a, b, c\}$ такая совокупность состоит из восьми подмножеств:

$\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$.

Доказано простое соотношение, позволяющее сразу же узнать общее число всех возможных подмножеств множества, содержащего ровно N элементов. Для любого N такое число равно 2^N. Например, для нашего множества $A = \{a, b, c\}$ число всех возможных подмножеств равно 2^3. Заданная совокупность множеств называется в математике ***системой множеств***.

Дотошный читатель уже готов обличить автора в некорректности – ранее автор утверждал, что элемент не может быть множеством, а разве система множеств не множество множеств? Ну, пусть сказано не «множество», а «совокупность», но, какая, в сущности, разница?

Чтобы избежать некорректности, предлагается определять систему множеств как множество имен (в общем случае, обозначений) подмножеств некоторого множества. Например, запись $\{a, c\}$ обозначает некоторое множество. И что необычного в том, что это обозначение раскрывает содержание множества? Например, имя «самолет» тоже частично раскрывает содержание объекта.

В систему множеств при этом, помимо пустого множества, включается и ***универсум***, т. е. множество, содержащее в качестве подмножеств все множества системы множеств. Другими словами, ***система множеств*** – это заданная совокупность обозначений подмножеств некоторого множества, принятого за универсум. Например, для множеств планет, комет, звезд и т. д. универсумом можно считать множество астрономических объектов.

Иногда в рассуждениях для одной и той же совокупности объектов допустимы разные универсумы. Например, для львов и шакалов в качестве универсума можно выбрать множества хищников или млекопитающих. Во избежание ошибок в таких случаях лучше заранее выбрать подходящий универсум и не изменять его в процессе рассуждений.

Для универсума нет общепринятых обозначений. Далее мы будем обозначать его символом $\boldsymbol{U}$.

Перейдем к операциям. Начнем с операции дополнения, которую можно определить только тогда, когда для системы множеств задан универсум.

Определение 1. ***Дополнением*** множества A называется множество $\overline{A}$, содержащее все элементы универсума, за исключением элементов множества A.

В логике дополнению множества соответствует связка «не». Например, «не красный» – любой возможный цвет, кроме красного. Обычно дополнение множества обозначается с помощью черты, расположенной над символьным обозначением этого множества. К примеру, $\overline{R_{ik}}$ обозначает дополнение множества R_{ik}.

Пример 1. Пусть $\boldsymbol{U} = \{a, b, c, d\}$ и $P = \{a, c\}$. Тогда $\overline{P} = \{b, d\}$.

Определим еще две основные операции – пересечение и объединение множеств.

Определение 2. ***Пересечением*** множеств A и B называется множество C, которое содержит все элементы, принадлежащие одновременно как A, так и B.

Операция пересечения множеств обозначается символом “$\cap$”. Символически Определение 2 можно записать как формулу

$C = A \cap B$.

Так, пересечение множества всех студентов данного вуза и множества всех участников КВН есть множество студентов этого вуза, участвующих в КВН. Другой пример: пересечение множества всех чисел, делящихся на 2, и множества всех чисел, делящихся на 3, – это множество всех чисел, делящихся на 6.

В логике операции пересечения соответствует логическая связка «И» (обозначается как $\wedge$ или &). Если речь идет об объектах со свойствами P или Q, то логическая формула $P \wedge Q$ означает, что речь идет только об объектах, имеющих оба этих свойства. Допустим, свойствам P и Q соответствуют некоторые множества S_P и S_Q, тогда пересечение этих множеств $S_P \cap S_Q$ включает все элементы, каждому из которых одновременно присущи свойства P и Q. При вычислении пересечения двух множеств необходимо выбрать из них только элементы, содержащиеся как в том, так и в другом множествах.

Пример 2. Пусть $A = \{a, b, c, d\}$ и $P = \{a, c, f\}$. Тогда

$A \cap P = \{a, c\}$.

Возможна ситуация, когда при вычислении пересечения двух множеств оказывается, что эти множества не содержат общих элементов. Пересечение таких множеств – пустое множество. Например, для $Q = \{a, c,\}$ и $R = \{b, d\}$ $Q \cap R = \varnothing$.

Из этого, в частности, следует одно «необычное» свойство пустого множества: *пустое множество включено в любое множество*.

Это свойство легко доказывается. В самом деле, пусть дано произвольное множество A. Для него при заданном универсуме существует дополнение $\overline{A}$, при этом из Определений 1 и 2 следует, что $A \cap \overline{A} = \varnothing$. Но пересечение двух множеств включено в каждое из этих множеств, следовательно, $\varnothing \subseteq A$.

Определение 3. *Объединением* множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств.

Операция объединения множеств обозначается символом «$\cup$». Символически Определение 3 можно записать как формулу

$C = A \cup B$.

В логике операции объединения соответствует логическая связка «ИЛИ» (обозначается «$\vee$»). Если речь идет об объектах со свойствами P или Q, то логическая формула $P \vee Q$ означает, что речь идет только об объектах, обладающих хотя бы одним из этих свойств. Объекты, имеющие оба свойства P и Q, также принадлежат объединенному множеству.

Пример 3. Пусть $A = \{a, b, c, d\}$ и $P = \{a, c, f\}$. Тогда

$A \cup P = \{a, b, c, d, f\}$.

Обратите внимание, что в Примере 3 элементы a и c, которые содержатся в каждом из множеств A и B, в объединении C не удваиваются, а содержатся один раз. В математике и ее приложениях иногда используют множества с кратными элементами (они называются *мультимножествами*). В таких множествах некоторые законы отличаются от законов обычной алгебры множеств.

Операции дополнения, пересечения и объединения являются ***основными*** операциями алгебры множеств.

Определение 4. ***Разностью*** множеств A и B называется множество $C = A \setminus B$, которое содержит только элементы множества A, не принадлежащие одновременно множеству B.

Пример 4. Пусть $A = \{a, b, c, d\}$ и $B = \{a, c, f\}$. Тогда

$A \setminus B = \{b, d\}$.

Важно отметить, что разность множеств – ***производная*** операция, ее можно выразить с помощью основных операций. Для разности множеств справедливо следующее соотношение:

$A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Если в Примере 4 задать универсум, например, $\boldsymbol{U} = \{a, b, c, d, e, f\}$, то нетрудно проверить это равенство:

$\overline{B} = \{b, d, e\}$; тогда $A \setminus B = A \cap \overline{B} = \{b, d\}$.

В то же время операцию дополнения можно выразить с помощью операции разности: $\overline{A} = \boldsymbol{U} \setminus A$. На рис. 3 соответствующие операции над множествами изображены с помощью «кругов Эйлера». Серым цветом показаны результаты операций.

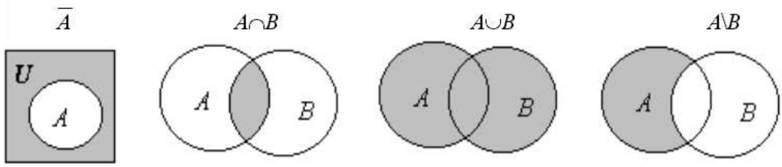


Рис. 3

Хотелось бы обратить внимание на одно важное обстоятельство. Для множеств A и B, у которых нет общих элементов, справедливы следующие соотношения:

$A \cap B = \varnothing$; $A \subseteq \overline{B}$; $B \subseteq \overline{A}$.

Ситуация, соответствующая этим соотношениям, наглядно отображается с помощью диаграммы Эйлера на рис. 4.

Теперь у нас вполне достаточно понятий для того, чтобы отобразить заданные суждения в виде математической формулировки. Например, суждение «Все члены палаты лордов носят титул пэра» мы расчленяем на субъект «члены палаты лордов» (A) и предикат «носят титул пэра» (B). Тогда математическая формула данного суждения:

$A \subseteq B$.

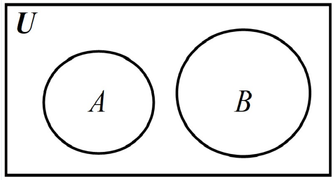


Рис. 4

Это означает, что все члены палаты лордов включены в множество тех, кто носит титул пэра. Более сложное суждение, например: «Все члены палаты лордов носят титул пэра и находятся в здравом рассудке», выражается с помощью двух предикатов: «носят титул пэра» (B) и «находятся в здравом рассудке» (C). Получим следующую математическую формулировку:

$$A \subseteq (B \cap C). \tag{1.1}$$

В случаях, когда в суждении имеются предикаты с отрицаниями, в математической записи используют операцию дополнения. Например, суждение «Все члены палаты лордов носят титул пэра и не принимают участия в скачках на мулах» можно записать как

$$A \subseteq (B \cap \overline{D}), \tag{1.2}$$

где D – предикат «принимают участие в скачках на мулах».

Если использовать диаграммы Эйлера, получим наглядное изображение формул (1.1) и (1.2) в виде, показанном на рис. 5 и 6.

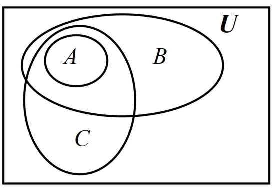


Рис. 5

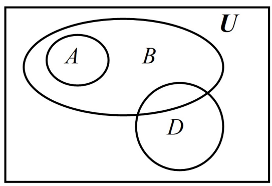


Рис. 6

Количественные соотношения в диаграммах Эйлера (т. е. в данном случае – площади фигур) не принимаются во внимание. Среди наших знаний немало таких, когда мы не знаем, чему равно число элементов множества, но это не мешает нам знать, что некоторые из таких множеств строго включены в другие множества (например, множество деревьев включено в множество растений), или что некоторые из таких множеств не имеют общих элементов с другими множествами (например, среди рыб нет млекопитающих).

В математическую форму суждений удается перевести многие предложения естественного языка. Математические и логические свойства суждений мы подробно рассмотрим в следующих разделах. А пока приведем общие законы алгебры множеств, которые необходимы для более глубокого понимания этих свойств.

3. Законы алгебры множеств и их обоснование

Законы алгебры множеств – это по сути теоремы, которые выводятся из основных определений и аксиом. Часто перечисляются 26 или 28 законов алгебры множеств. Здесь мы приведем без доказательства лишь некоторые из них, нужные для понимания дальнейшего. А затем покажем, как эти законы можно обосновать.

Пусть A, B, C – некоторые произвольные множества в универсуме $\boldsymbol{U}$. Тогда законами алгебры множеств являются следующие соотношения между ними.

1. $\overline{\overline{A}} = A$. (Закон двойного дополнения)

Пример 5. Пусть $\boldsymbol{U} = \{a, b, c, d\}$ и $P = \{a, c\}$. Тогда $\overline{P} = \{b, d\}$ и $\overline{\overline{P}} = \{a, c\} = P$.

В алгебре множеств это соотношение носит название ***закон инволюции***. В логике этот закон известен под названием ***закон отрицания отрицания*** (или закон двойного отрицания): не(не-A) – то же самое, что и A.

2. $A \cap \overline{A} = \varnothing$ (множество и его дополнение не имеют общих элементов).

В логике этому закону соответствует ***закон непротиворечия*** (утверждение и его полное отрицание логически несовместимы).

3. $A \cup \overline{A} = \boldsymbol{U}$.

В логике этот закон соответствует ***закону исключенного третьего*** (совмещение любого утверждения и его полного отрицания не допускает присутствия какого-либо третьего промежуточного варианта).

Следующие соотношения более подробно характеризуют свойства пустого множества и универсума:

4. $\overline{\varnothing} = \boldsymbol{U}$; 5. $\overline{\boldsymbol{U}} = \varnothing$

6. $A \cap \varnothing = \varnothing$; 7. $A \cup \varnothing = A$;

8. $A \cap \boldsymbol{U} = A$; 9. $A \cup \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}$.

Следующие законы алгебры множеств связывают друг с другом отношения включения и равенства:

10. Если $A \subseteq B$, то справедливы следующие соотношения:

10a. $A \cap B = A$; 10b. $A \cup B = B$;

10c. $\overline{A} \cup B = \boldsymbol{U}$; 10d. $A \cap \overline{B} = \varnothing$.

Соотношение 10d можно выразить также с помощью операции разности множеств:

10e. Из $A \subseteq B$ следует $A \setminus B = \varnothing$.

Законы де Моргана:

11a. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; 11b. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Законы дистрибутивности:

12a. *Дистрибутивность пересечения*:

$$A \cap (B \cup C \cup \ldots \cup D) = ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup \ldots \cup (A \cap D)).$$

12b. *Дистрибутивность объединения*:

$$A \cup (B \cap C \cap \ldots \cap D) = ((A \cup B) \cap (A \cup C) \cap \ldots \cap (A \cup D)).$$

Законы дистрибутивности для множеств аналогичны закону дистрибутивности умножения для чисел:

$a(b + c + d) = ab + ac + ad$.

Но для чисел, в отличие от множеств, закон дистрибутивности сложения не верен.

И, наконец, приведем два закона, которые определяют основные свойства отношения включения. Их мы будем использовать в дальнейшем в правилах логического вывода.

13a. Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$ (***закон транзитивности включения***);

13b. $A \subseteq B$ равносильно $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ (***закон контрапозиции***).

В математической литературе приводятся разные способы обоснования этих законов. Наиболее распространенный заключается в том, что некоторые законы алгебры множеств принимаются в качестве *аксиом*, а остальные выводятся с помощью *правил вывода*. Здесь мы рассмотрим относительно простой способ обоснования, который называется *комбинаторным*.

Пусть необходимо обосновать некоторые законы для двух множеств X и Y. Рассмотрим диаграмму Эйлера (рис. 7), на которой изображены эти множества и объемлющий их универсум ($\boldsymbol{U}$).

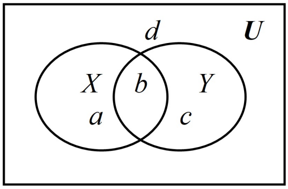


Рис. 7

Выделим на диаграмме участки a, b, c и d, не имеющие внутренних границ, т. е. выполним разбиение нашего универсума на 4 не пересекающихся друг с другом множества. ***Разбиение множества*** означает, что любая пара подмножеств разбиения не содержит общих элементов. Заметим, что разбиение возможно для любых, даже бесконечных множеств. Данное разбиение позволяет представить множества a, b, c и d как элементы, из которых состоят универсум $\boldsymbol{U}$ и множества X и Y. Для них справедливы соотношения:

$\boldsymbol{U} = \{a, b, c, d\}$; $X = \{a, b\}$; $Y = \{b, c\}$.

Примем эти соотношения в качестве исходных данных и докажем для такого общего представления данной системы из двух множеств один из законов де Моргана $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$. Получаем:

1) $X \cap Y = \{b\}$;
2) $\overline{X \cap Y} = \{a, c, d\}$;
3) $\overline{X} = \{c, d\}$;
4) $\overline{Y} = \{a, d\}$;
5) $\overline{X} \cup \overline{Y} = \{a, c, d\}$;
6) сравнивая 2 и 5, заключаем, что $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$, что и требовалось доказать.

Закон транзитивности (13a) интуитивно понятен. Рассмотрим обоснование закона контрапозиции (13b). Схема на рис. 7 нам не подходит, так как в ней между множествами X и Y нет соотношения включения. Однако, если убрать из схемы область a (можно считать, что это пустое множество), получим то, что нужно: $X \subseteq Y$. Этот результат выражается в виде равенств:

$\boldsymbol{U} = \{b, c, d\}$; $X = \{b\}$; $Y = \{b, c\}$.

Из них следует $X \subseteq Y$.

Приступим к доказательству. Для этого вычислим

1) $\overline{X} = \{c, d\}$;

2) $\overline{Y} = \{d\}$;

3) сравнивая $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, убедимся, что $\overline{Y} \subseteq \overline{X}$, что и требовалось доказать.

Для строгого доказательства законов алгебры множеств комбинаторным способом нужно еще рассмотреть все варианты, когда части a, b, c и d по отдельности или в сочетаниях равны пустому множеству. Эти варианты здесь не рассматриваются, но дотошный читатель может их проверить.

В рамках ТФС место алгебры множеств занимает формальная ***теория множеств*** [2]. Книгу Н. Бурбаки по теории множеств легко найти в Интернете, и читатель получит возможность убедиться: иногда в математике простые вещи выражают очень сложно.

4. Е-структуры: определение и основные свойства

В этом разделе рассказывается о структурах, с помощью которых можно анализировать рассуждения, состоящие из большого числа разных суждений. Рассмотрим пример из книги Л. Кэрролла «История с узелками».

Пример 6. Пусть задана следующая совокупность суждений:

1) Все малые дети неразумны.

2) Все, кто укрощает крокодилов, заслуживают уважения.

3) Все неразумные люди не заслуживают уважения.

Тем самым задано рассуждение, где суждения играют роль ***логических посылок***, и нужно определить, что из них следует.

Система таких посылок называется в логике ***полисиллогизмом*** или ***соритом***. Просто ***силлогизм*** – это система, которая содержит всего лишь две посылки. Аристотелева силлогистика в основном предназначена лишь для решения силлогизмов. А чтобы с ее помощью получить следствие в полисиллогизме, надо последовательно подбирать подходящие пары из суждений, получать из них следствия и так до тех пор, пока не будут исчерпаны все возможности. Но такой путь довольно труден и не всегда приводит к правильному решению.

Математик и логик Чарльз Л. Доджсон разработал оригинальную методику решения не только силлогизмов, но и полисиллогизмов. Наша методика существенно отличается от методики Кэрролла, но начальные этапы решения таких задач почти полностью совпадают. С самого начала надо определить основные термины, из которых состоит система посылок, ввести для них обозначения и выбрать подходящий универсум. Очевидно, основными терминами данной задачи должны быть следующие: «малые дети» (C), «разумные люди» (S), «те, кто укрощает крокодилов» (T) и «те, кто заслуживает уважения» (R). Эти термины представляют какие-то множества в универсуме «люди». Их отрицаниями соответственно будут следующие термины: «не малые дети» ($\overline{C}$), «неразумные люди» ($\overline{S}$), «те, кто не укрощает крокодилов» ($\overline{T}$) и «те, кто не заслуживает уважения» ($\overline{R}$).

Каждая посылка – это суждение. Теперь можно записать условие задачи в обозначениях алгебры множеств:

1) $C \subseteq \overline{S}$ (множество малых детей включено в множество неразумных людей);

2) $T \subseteq R$ (множество укротителей крокодилов входит во множество людей, заслуживающих уважения);

3) $\overline{S} \subseteq \overline{R}$ (множество неразумных включено в множество не заслуживающих уважения).

Сразу отметим, что в состав терминов системы мы обязательно включаем не только «позитивные» термины (C, S, T и R), но и их отрицания (для множеств – дополнения): $\overline{C}$, $\overline{S}$, $\overline{T}$ и $\overline{R}$. Тем самым мы определили некоторую структуру, состоящую из системы множеств $S = (\varnothing, \boldsymbol{U}, C, S, T, R, \overline{C}, \overline{S}, \overline{T}, \overline{R})$ и набора отношений включения между этими множествами, сформулированных в посылках. Термины и их дополнения будем называть ***литералами***.

Дадим более общее и точное определение этих структур. Термины и их дополнения назовем ***базовыми литералами*** рассуждения. Условимся, что к литералам относятся также обозначения пустого множества и универсума. Сначала дадим определение суждения. Далее в разделе 7, помимо базовых, мы введем иные (*неопределенные*) литералы.

Определение 5. ***Суждением*** называется выраженное с помощью литералов отношение включения, в левой части которого содержится единственное множество, представленное литералом, а в правой части – пересечение множеств, представленных некоторыми литералами. Литерал в левой части называется ***субъектом суждения***, множество литералов в правой части, – ***предикатами суждения***.

Структуру рассуждений с такими посылками предложено называть ***логической структурой Эйлера*** (Euler) (сокращенно *E*-структурой). Дадим ее определение.

Определение 6. ***E-структурой*** называется совокупность литералов, соотношения между которыми определяются с помощью ***исходных посылок***, выраженных в форме суждений.

Таким образом, пример, приведенный в начале раздела, можно математически выразить как *E*-структуру с множеством базовых литералов $L = \{C, S, T, R, \overline{C}, \overline{S}, \overline{T}, \overline{R}\}$ и заданными посылками.

Хотя в дальнейшем мы будем оперировать в основном литералами, а не множествами, надо также помнить, что каждому рассуждению соответствует система множеств, в которой законы алгебры множеств соблюдаются неукоснительно. Это поможет не выходить в своем анализе за рамки строгой математики.

Следующий шаг после уточнения терминологии при анализе *E*-структур – вывод следствий. Для любой системы логического вывода необходимы, по крайней мере, два компонента:

1) ***аксиомы***, записанные с помощью определенных правил на языке математики, и

2) ***правила логического вывода***, с помощью которых получают следствия из произвольно заданных посылок.

Таким образом мы представляем каждую заданную *E*-структуру аксиоматической системой, где посылки играют роль аксиом.

Методы решения этих задач рассмотрим в следующих разделах, а сейчас перейдем к правилам вывода. При определении этих правил используются некоторые законы алгебры множеств, в частности, те, которые устанавливают системные свойства отношения включения (в предыдущем разделе им присвоены номера 13a и 13b). Здесь мы полностью отходим от методики Л. Кэрролла. Сходство заключается лишь в том, что он также неявно использовал некоторые законы алгебры множеств.

Пусть X, Y и Z – базовые литералы *E*-структуры.

Определение 7. ***Правила вывода*** *E*-структуры таковы:

Правило C (***контрапозиции***): $X \subseteq Y$ равносильно $\overline{Y} \subseteq \overline{X}$;

Правило T (***транзитивности***): из $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq Z$ следует $X \subseteq Z$;

Правило инволюции (двойного дополнения): $\overline{\overline{X}}$ равносильно X.

Перечисленные правила не надо обосновывать – это законы алгебры множеств.

Стоит отметить, что E-структуры есть частный случай QC-структур, подробное описание которых имеется в [4].

Теперь у нас достаточно инструментов для того, чтобы приступить к решению задачи Л. Кэрролла. Сначала применим ко всем посылкам правило контрапозиции и получим следующие выражения, которые можно считать первыми следствиями наших посылок:

$C1$: $S \subseteq \overline{C}$ (следует из $C \subseteq \overline{S}$ по правилу контрапозиции);

$C2$: $\overline{R} \subseteq \overline{T}$ (следует из $T \subseteq R$ по правилу контрапозиции);

$C3$: $R \subseteq S$ (следует из $\overline{S} \subseteq \overline{R}$ по правилу контрапозиции).

Необходимо учесть, что при выводе следствий по правилу контрапозиции иногда используется закон двойного отрицания. Так, если из первой посылки получили по правилу ***C*** следствие $\overline{\overline{S}} \subseteq \overline{C}$, то из равенства $\overline{\overline{S}} = S$ получим $S \subseteq \overline{C}$.

Теперь переведем полученные следствия с математического языка на обычный. Например, $S \subseteq \overline{C}$ означает «Все разумные люди не являются малыми детьми». Но продолжим вывод следствий – у нас в запасе еще есть правило транзитивности. Из всех посылок и полученных следствий выберем пары суждений, у которых левая часть первого суждения полностью совпадает с правой частью другого суждения. Получим такие пары:

($C \subseteq \overline{S}$, $\overline{S} \subseteq \overline{R}$); ($T \subseteq R$, $R \subseteq S$); ($\overline{S} \subseteq \overline{R}$, $\overline{R} \subseteq \overline{T}$); ($R \subseteq S$; $S \subseteq \overline{C}$).

Из них по правилу ***T*** получаем еще четыре следствия:

$C4$: $C \subseteq \overline{R}$;

$C5$: $T \subseteq S$;

$C6$: $\overline{S} \subseteq \overline{T}$;

$C7$: $R \subseteq \overline{C}$.

Для этих новых суждений снова выберем подходящие для применения правила ***T*** пары суждений из уже имеющихся и получим еще четыре суждения, причем некоторые из них дублируют полученные ранее. Оставим только еще не встречавшиеся и найдем:

$C8$: $C \subseteq \overline{T}$;

$C9$: $T \subseteq \overline{C}$.

Далее использование любого правила вывода не приведет к получению новых суждений. Процесс вывода на этом заканчивается.

Наиболее интересны следствия, полученные на последнем этапе процедуры вывода. Если перевести их на обычный язык, получим следующие суждения: «Все малые дети не укрощают крокодилов» и «Все, кто укрощает крокодилов, не являются малыми детьми». Задача решена, но хотелось бы, чтобы инструменты для ее решения были проще.

Чтобы заранее понять, как нам помогут эти инструменты, попробуем решить данную задачу с помощью схемы (ниже мы узнаем, что подобные схемы называются графами). Запишем в одной строке все позитивные (т. е. без дополнений) литералы задачи, а строго под ними в другой строке – дополнения тех же литералов. Затем соединим литералы линиями со стрелками в соответствии с посылками задачи: $C \to \overline{S}$, $T \to R$ и $\overline{S} \to \overline{R}$. В результате имеем такую схему (рис. 8):

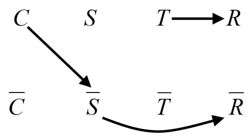


Рис. 8

Теперь нарисуем контрапозиции заданных посылок. Здесь тоже ничего сложного нет, используем следующие два правила:

Правило 1. Если посылка соединяет литералы в одной строке (например, $T \to R$ или $\overline{S} \to \overline{R}$), то связываем стрелками противоположные литералы в другой строке, а ***направление стрелок изменяем на обратное***.

Правило 2. Если на схеме косые стрелки, соединяющие литералы из разных строк (например, $C \to \overline{S}$), то считаем эту стрелку диагональю некоторого прямоугольника, и просто дорисовываем другую диагональ, ***сохраняя при этом направление стрелки вверх или вниз*** ($S \to \overline{C}$).

Контрапозиции нарисуем штриховыми стрелками. Тогда получим:

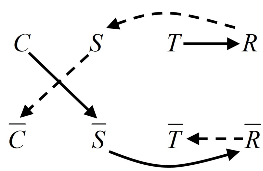


Рис. 9

Затем найдем на схеме «начальные» литералы, в которые не входит ни одна стрелка (это C и T), и «прогуляемся» по направлениям линий со стрелками до окончания пути. Получим такие последовательности

$C \to \overline{S} \to \overline{R} \to \overline{T}$ и $T \to R \to S \to \overline{C}$. В итоге (вспомним закон транзитивности) получаем окончательный результат: $C \to \overline{T}$ и $T \to \overline{C}$.

Следует отметить, что наши манипуляции со стрелками можно выразить с помощью математики, для этого понадобятся новые для нас математические понятия: *графы* и *частично упорядоченные множества*. Они пригодятся при решении более сложных задач.

Для закрепления полученных знаний полезно решить самостоятельно еще одну задачу, взятую из книги Л. Кэрролла.

Даны посылки:

1) Все члены палаты общин находятся в здравом рассудке.

2) Все, кто носит титул пэра, никогда не принимают участия в скачках на мулах.

3) Все члены палаты лордов носят титул пэра.

Что из этого следует? Какими свойствами обладают те, кто принимает участие в скачках на мулах?

Указание: рекомендуется ограничить универсум членами парламента и учесть, что парламент состоит только из двух палат (это, в частности, означает, что множество членов палаты лордов есть дополнение множества членов палаты общин).

Получение всех возможных следствий не является завершающим этапом анализа. Нам еще предстоит освоить методы, которые позволяют определить, корректна ли наша система и содержит ли она неопределенности. Эти методы, кстати, в силлогистике не предусмотрены.

Использование алгебры множеств (точнее, *E*-структур) при моделировании позволяет выявить и другие недостатки традиционной силлогистики. Например, в силлогистике нельзя использовать в качестве субъектов отрицательные литералы, в некоторых случаях при изменении порядка посылок получаются разные заключения – по современным представлениям это грубая ошибка. Те, кто знаком с правилами силлогистики, могут проверить следующий пример. Даны два суждения:

1) Все рептилии животные.

2) Все крокодилы рептилии.

Заключением этой пары суждений является суждение «Все крокодилы животные». Если переставить посылки, то по правилам силлогистики заключением будет «Некоторые животные крокодилы», но никак не «Все крокодилы животные».

5. Графы и частично упорядоченные множества

Обе структуры, указанные в названии раздела, объединяет то, что они относятся к ***бинарным отношениям***. А как понимается математическое отношение вообще? Наглядно любое ***отношение*** можно отобразить таблицей с произвольным числом строк и колонок. Более строгое определение отношения будет приведено далее. Если в таблице только две колонки, она представляет бинарное отношение.

Пусть задано множество каких-то объектов, и из них по определенному принципу формируются пары. Например, дано некоторое множество людей, а пары в нем выбираются так: первый элемент пары – некий человек, а второй – один из его родителей. Пример приведен в таблице

Дети	***Родители***
Иван	Мария
Глеб	Степан
Дарья	Мария
Глеб	Мария

Ясно, что один и тот же человек может присутствовать в двух и более парах, например, когда у него двое, трое или более детей. Например, три пары в этом отношении (Иван, Мария), (Дарья, Мария), (Глеб, Мария) означают, что Иван, Дарья и Глеб – дети Марии (в отличие от множеств из нескольких элементов пары в бинарных отношениях ограничены не фигурными, а круглыми скобками). Математический пример бинарного отношения – пары, составленные из некоторого множества чисел, причем первое число в каждой паре меньше второго. Это пример бинарного отношения «меньше». Другой пример: задана некоторая система множеств, а бинарное отношение в этой системе формируется из пар множеств по принципу: первое множество включено во второе множество – это бинарное отношение «включение множеств».

5.1. Графы

Существует много типов бинарных отношений с разными свойствами. Самый общий из них – ***граф***. Это произвольное бинарное отношение, отличающееся непривычной терминологией: элементы множества, из которого формируются пары, называются ***вершинами***, а сами пары, в зависимости от их свойств, носят названия ***ребра*** или ***дуги***. В графе могут присутствовать вершины, не связанные дугами с другими вершинами – они называются ***изолированными вершинами***. Графы обычно изображаются не в виде таблицы с двумя колонками (каждая строка такой таблицы представляет пару элементов – вершин), а с помощью схемы.

Рассмотрим пример. Пусть задано множество вершин

$V = \{a, b, c, d, e\}$,

из которого сформировано некоторое множество пар

$E = \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, a), (c, e)\}$.

Множество пар E, сформированное из множества вершин V, – пример бинарного отношения. Преобразуем это бинарное отношение в схему. Для этого изобразим на листе бумаги все его вершины произвольным образом и соединим вершины линиями со стрелками так, чтобы каждая стрелка выходила из первого элемента пары и входила во второй элемент пары (см. рис. 10). Причем, если некоторая пара вершин соединяется стрелкой в одну и в другую сторону, то вместо линий со стрелками рисуют линию без стрелок (для нашего примера это пары (a, c) и (c, a)). ***Дугами*** в графе будут соединительные линии со стрелками в одну сторону, а ***ребрами*** – соединения без стрелок или со стрелками, направленными в обе стороны. Можно считать, что каждое ребро содержат пару разнонаправленных дуг.

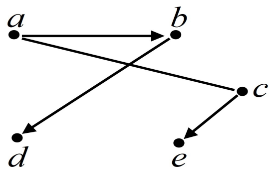


Рис. 10

Каждая дуга графа определяется ***начальной*** и ***конечной*** вершинами. Граф, у которого все связи представлены только ребрами, называется ***неориентированным*** графом (или просто графом). Граф, у которого отсутствуют ребра, называется ***ориентированным*** графом, а граф, имеющий и ребра, и дуги – ***смешанным***.

Если, используя изображение произвольного графа, двигаться от вершины к вершине в соответствии с направлением дуг (при этом по ребру можно передвигаться в любую сторону), то последовательность вершин, отмечаемых по мере такого «обхода», называется ***путем*** в данном графе. К примеру, для графа G на рис. 10 существуют следующие пути: (a, b, d); (c, e); (a, c, a, b) и т. д. Пути можно записывать, используя стрелки, например, $a \to b \to d$. При этом возможны графы, содержащие самопересекающиеся пути, т. е. повторяющиеся вершины и дуги в некоторых путях.

Циклом в графе называется путь, в котором начальная и конечная вершина совпадают.

Например, в графе на рис. 10 имеется один цикл, обусловленный тем, что в нем есть ребро (a, c). Поэтому циклу соответствует путь (a, c, a). Если в данный граф добавить еще одну дугу (d, a), то появится еще один цикл: (d, a, b, d). По сути, цикл – это путь без начала и конца, поскольку, «путешествуя» по нему, можно «крутиться» бесконечно.

Одно из основных понятий в теории графов – ***достижимость***. Вершина y графа G называется ***достижимой*** из вершины x, если в G существует путь из вершины x в вершину y. Часто бывает необходимо определить для каждой вершины графа G множество всех достижимых из нее вершин. Например, для вершины a в графе на рис. 10 достижимы все вершины этого графа (в том числе и сама вершина a), в то время как из вершины b достижима только одна вершина – d, а для вершины e в данном графе вообще нет достижимых вершин.

Любое бинарное отношение можно представить как граф, в котором сформулированы определенные закономерности или ограничения. Эти закономерности и ограничения определяют тип (или класс) бинарного отношения.

5.2. Частично упорядоченные множества

Частично упорядоченное множество – один из типов бинарного отношения. Отношение ***частичного порядка*** относится к фундаментальным общематематическим понятиям и широко используется в теоретической математике, в системах логического вывода и во многих других приложениях. Оно обобщает такие широко известные бинарные отношения, как «меньше или равно» ($\leq$) для чисел и «включено или равно» ($\subseteq$) для множеств. Обозначение «$\leq$» в математической литературе часто используется для обозначения не только отношения «меньше или равно» для чисел, но и для произвольного отношения частичного порядка. Формально отношение частичного порядка определяется как заданное на множестве X бинарное отношение со следующими свойствами:

1) ***рефлексивности***: $a \leq a$ для любого $a \in X$;
2) ***транзитивности***: если $a \leq b$ и $b \leq c$, то $a \leq c$;
3) ***антисимметричности***: из $a \leq b$ и $b \leq a$ следует $a = b$,

где a, b и c – произвольные элементы частично упорядоченного множества X.

Среди всех отношений частичного порядка наиболее прост по структуре ***линейный порядок***, когда для любого множества из двух элементов $\{a, b\}$ определено либо $a \le b$, либо $b \le a$. Примеры линейного порядка: множества чисел, упорядоченных по величине, и множества слов, расположенных в лексикографическом порядке. Их можно по заданному порядку сформировать в виде одной последовательности без разветвлений. Например, $2 < 5 < 12 < 19$. При линейном порядке все элементы частично упорядоченного множества можно выстроить в одну цепочку по заданному отношению (например, слова в словарях).

В то же время существует немало множеств с отношением частичного порядка, среди которых имеются пары элементов, не связанные этим отношением. К таким множествам, в частности, относятся системы множеств, сравниваемых по включению. Например, если заданы три множества

$$P = \{a, b, c\};\ Q = \{b, d\};\ R = \{a, b, c, d\},$$

то для них линейный порядок установить невозможно, так как множества P и Q несравнимы – ни одно из них не включено в другое. В то же время, если множество Q в этой совокупности заменить на множество $Q_1 = \{b, c\}$, получим линейный порядок

$$Q_1 \subset P \subset R \text{ или } \{b, c\} \subset \{a, b, c\} \subset \{a, b, c, d\}.$$

Еще одно широко известное отношение частичного порядка – это ***порядок по делимости***. Предположим, задано некоторое множество положительных целых чисел (например, $D = \{1, 2, 3. 4, 6, 12\}$. Тогда будем считать, что для двух чисел x и y верно $x \le y$, если и только если число y делится без остатка на число x.

Для заданного множества D порядок по делимости верен для пар (1, 2); (2, 4); (3, 6) и т. д., Но для некоторых пар (например, (4, 6)) такой порядок не соблюдается, так как число 6 не делится без остатка на число 4. Нетрудно убедиться, что отношение порядка по делимости полностью соответствует свойствам частично упорядоченных множеств (рефлексивности, транзитивности и антисимметричности).

В математике известно немало структур, имеющих свойства частичного порядка. Рассмотрим некоторые общие характеристики отношений частичного порядка. Далее в целях сокращения будем использовать вместо термина «частично упорядоченное множество» термин ***у-множество***.

Любое у-множество можно представить как ориентированный граф, в котором дуга $a \to b$ между парой элементов означает $a \le b$. Однако не любой ориентированный граф отображает у-множество. Чтобы ориентированный граф представлял правильное у-множество, необходимо и достаточно, чтобы в нем не было циклов.

В математической литературе у-множества по традиции изображаются в виде неориентированных графов (рис. 11), причем подразумевается, что предшествующие («меньшие») элементы расположены ниже последующих. Поэтому, если в этих схемах правильно заменить ребра на дуги, все дуги окажутся направлены снизу вверх.

На этих рисунках показаны не все связи между элементами: те, которые следуют из свойства транзитивности (например, связь $p \to s$ на каждом из рисунков), в них отсутствуют. Такое сокращенное представление у-множеств без транзитивных связей называется ***диаграммой Хассе***.

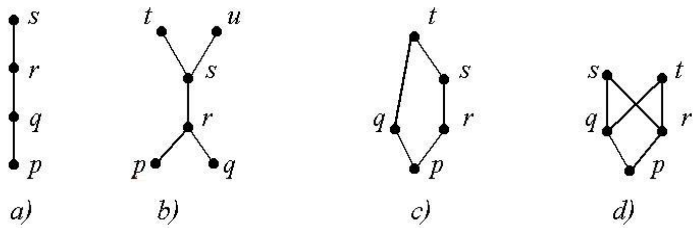


Рис. 11

В дальнейшем будем изображать частично упорядоченные множества не так, как это принято в математических работах по алгебре (см. рис. 11), а в виде ориентированных графов. Определим наименьший и наибольший элементы у-множеств.

Наименьшим элементом у-множества M (если он существует) называется элемент y такой, что $y \le a$ для любого элемента $a \in M$.

Наибольшим элементом у-множества M (если он существует) называется элемент y такой, что $a \le y$ для любого элемента $a \in M$.

Например, в у-множестве, изображенном на рис. 11b, нет ни наибольшего, ни наименьшего элементов, наименьший элемент (p) имеется в у-множествах на рис. 11a, 11c, 11d, а наибольший элемент имеется только в у-множествах, показанных на рис. 11a, 11c.

Если в качестве отношения частичного порядка выбрать отношение включения, то в нем наименьшим элементом будет пустое множество

($\varnothing$) (оно включено в любое множество), а наибольшим – универсум (в него включено любое множество системы).

Рассмотрим два очень важных понятия теории у-множеств, которые позволяют существенно облегчить решение некоторых задач анализа рассуждений. Это верхние и нижние конусы. Пусть A – произвольное подмножество у-множества M (т. е. $A \subseteq M$). Тогда для множества A можно вычислить верхний (A^{Δ}) и нижний (A^{∇}) конусы (они могут оказаться пустыми множествами).

Обычно в алгебре принято сразу определять верхние и нижние конусы для множеств, но здесь для лучшего понимания рассмотрим сначала верхние и нижние конусы для одного элемента у-множества. Пусть m_i – элемент у-множества M.

Определение 8. ***Верхний конус элемента*** m_i – это множество m_i^{Δ} элементов из M, в которое входит сам элемент m_i и все элементы, достижимые из m_i.

Определение 9. ***Нижний конус элемента*** m_i – это множество m_i^{∇} элементов из M, в которое входит сам элемент m_i и все элементы, из которых достижимо m_i.

Например, на у-множестве чисел $M = \{2, 4, 5, 7\}$ нижний конус числа 4 есть множество $\{2, 4\}$, а верхний – $\{4, 5, 7\}$. Если рассмотреть у-множество, показанное на рис. 11*b*, то

$$r^{\nabla} = \{p, q, r\} \text{ и } r^{\Delta} = \{r, s, t, u\}.$$

Рассмотрим более сложное понятие. Пусть необходимо определить верхний конус не для элемента, а для некоторого подмножества A у-множества M, при этом A содержит более одного элемента. Обозначим a_k элементы множества A.

Определение 10. ***Верхним конусом*** A^{Δ} множества A называется множество всех элементов m_i, принадлежащих множеству M и обладающих следующим свойством: любой элемент a_k из множества A будет меньше или равен ($\leq$) m_i.

Например, верхним конусом множества $\{q, r\}$ для у-множества на рис. 11*c* будет множество $\{t\}$ (элемент s не входит в верхний конус, потому что несравним с элементом q). Возможны случаи, когда верхний конус некоторого множества равен пустому множеству. Так, для рис. 11*d* верхний конус $\{s, t\}^{\Delta} = \varnothing$.

Аналогично определяется нижний конус множества.

Определение 11. ***Нижним конусом*** A^{∇} множества A называется множество всех элементов m_i, принадлежащих у-множеству M и обладающих следующим свойством: любой элемент a_k из множества A больше или равен ($\geq$) m_i.

Например, нижним конусом множества $\{q, r\}$ для у-множества на рис. 11*c* будет множество $\{p\}$.

При большом числе элементов у-множества M выбирать элементы верхнего и нижнего конусов множества элементов намного сложнее, чем для верхних или нижних конусов элементов. С целью облегчения таких вычислений предлагается следующая теорема.

Теорема 1. Пусть в произвольном у-множестве M выбрано некоторое подмножество $A = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$ его элементов. Тогда

(i) $A^{\Delta} = a_1^{\Delta} \cap a_2^{\Delta} \cap \ldots \cap a_n^{\Delta}$;

(ii) $A^{\nabla} = a_1^{\nabla} \cap a_2^{\nabla} \cap \ldots \cap a_n^{\nabla}$.

Доказательство. Пусть m_i – произвольный элемент множества A^{Δ}. Чтобы для каждого a_k ($a_k \in A$) соблюдалось условие $a_k \leq m_i$, необходимо и достаточно, чтобы элемент m_i содержался в верхнем конусе каждого из элементов множества A. А это означает, что элемент m_i содержится в пересечении $a_1^{\Delta} \cap a_2^{\Delta} \cap \ldots \cap a_n^{\Delta}$ верхних конусов всех этих элементов. Аналогично, если m_i – произвольный элемент множества A^{∇}, то для каждого a_k ($a_k \in A$) соблюдается условие $m_i \leq a_k$, а значит, элемент m_i содержится в нижнем конусе каждого из элементов множества A. Следовательно, все элементы множества A^{∇} должны находиться в пересечении $a_1^{\nabla} \cap a_2^{\nabla} \cap \ldots \cap a_n^{\nabla}$ нижних конусов. *Конец доказательства.*

Для лучшего понимания соотношений, связанных с конусами, рассмотрим граф, изображающий диаграмму Хассе некоторого у-множества (рис. 12).

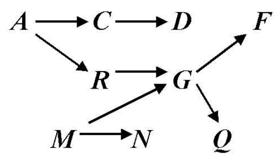


Рис. 12

По этому рисунку можно, используя свойство достижимости, легко вычислить верхние и нижние конусы любых элементов. Например,

$R^{\Delta} = \{R, G, F, Q\}$ (элемент R содержится в верхнем конусе по определению, а остальные элементы введены как достижимые из R);

$M^{\Delta} = \{M, N, G, F, Q\}$; $D^{\Delta} = \{D\}$; $C^{\Delta} = \{C, D\}$;

$D^{\nabla} = \{D, C, A\}$ (элемент D содержится в нижнем конусе по определению, а элементы C и A введены в нижний конус, поскольку из них достижим элемент D);

$R^{\nabla} = \{R, A\}$; $M^{\nabla} = \{M\}$; $C^{\nabla} = \{C, A\}$, $G^{\nabla} = \{G, M, R, A\}$.

Зная верхние или нижние конусы элементов, по Теореме 1 легко вычислить соответственно верхние и нижние конусы для множеств, состоящих их этих элементов. Например,

$\{R, M\}^{\Delta} = R^{\Delta} \cap M^{\Delta} = \{R, G, F, Q\} \cap \{M, N, G, F, Q\} = \{G, F, Q\}$;

$\{R, C\}^{\Delta} = R^{\Delta} \cap C^{\Delta} = \{R, G, F, Q\} \cap \{C, D\} = \varnothing$ (посмотрев на рис. 12, можно убедиться, что в графе нет ни одной вершины, которая достижима как из R, так и из C);

$\{R, M\}^{\nabla} = R^{\nabla} \cap M^{\nabla} = \{R, A\} \cap \{M\} = \varnothing$;

$\{R, C\}^{\nabla} = R^{\nabla} \cap C^{\nabla} = \{R, A\} \cap \{C, A\} = \{A\}$.

Рассмотрим еще одно соотношение, связанное с конусами.

Теорема 2. Пусть r и q – различные элементы у-множества, причем $r \le q$. Тогда для верхних и нижних конусов этих элементов соблюдаются соотношения $q^{\Delta} \subseteq r^{\Delta}$ и $r^{\nabla} \subseteq q^{\nabla}$.

Доказательство. Данные соотношения следуют из определений верхних и нижних конусов. Если $r \le q$, то q содержится в r^{Δ} и, следовательно, все элементы из q^{Δ} также содержатся в r^{Δ}. В нижних конусах наоборот: если $r \le q$, то r содержится в q^{∇} и, значит, все элементы из r^{∇} также содержатся в q^{∇}. *Конец доказательства.*

Например, для у-множества, изображенного на рис. 12, элементы A и G – *сравнимы*, т. е. $A \le G$ (элемент A предшествует элементу G). Построим верхние и нижние конусы этих элементов:

$A^{\Delta} = \{A, C, D, R, G, F, Q\}$; $G^{\Delta} = \{G, F, Q\}$; $A^{\nabla} = \{A\}$;

$G^{\nabla} = \{G, R, A, M\}$.

Сравнивая эти конусы по включению, получим, что в соответствии с Теоремой 2 соблюдаются следующие соотношения: $G^{\Delta} \subseteq A^{\Delta}$ и $A^{\nabla} \subseteq G^{\nabla}$. Если же выбрать для анализа пару элементов, для которых отношение $\le$ не имеет места (например, элементы Q и N на рис. 12), то окажется, что для них соотношения из Теоремы 2 неверны.

Для анализа E-структур очень важны еще два понятия – минимальные и максимальные элементы, существенно отличающиеся от наименьшего и наибольшего элементов, определенных выше.

Начнем с минимальных элементов. Как мы уже знаем, если в структуре существует наименьший элемент, то он меньше любого другого элемента этого у-множества. Но если наименьшего элемента нет, то в у-множестве могут существовать элементы, которым ни один элемент не предшествует. Например, в у-множестве на рис. 12 к таким относятся элементы A и M. Ясно, что каждый из них не наименьший, хотя бы потому, что нет ответа, например, на вопрос: элемент M меньше, чем A, R, C или D? Такие элементы в у-множествах называют ***атомами*** (или ***минимальными элементами***).

Аналогично определяются ***коатомы*** (или ***максимальные элементы***). Если в структуре отсутствует наибольший элемент, эту роль выполняют элементы, больше которых в структуре не существует. В у-множестве на рис. 12 максимальных элементов уже четыре: D, F, Q и N.

Для удобства можно считать, что в у-множествах с наименьшими элементами минимальны элементы, непосредственно следующие за наименьшими элементами, а в у-множествах с наибольшими элементами максимальные – те, которые непосредственно предшествуют наибольшим элементам. Например, в E-структурах обязательно существование наименьшего ($\varnothing$) и наибольшего ($\boldsymbol{U}$) элементов. Однако их присутствие в процессе решения не играет никакой роли, только значительно увеличивает число возможных связей, в то время как максимальные и минимальные элементы важны для анализа. С учетом того, что в схемах E-структур наибольший и наименьший элементы не показываются, можно дать следующие определения

Минимальные элементы E-структуры – это элементы, в которые не входит ни одна дуга.

Максимальные элементы E-структуры – это элементы, из которых не исходит ни одна дуга.

6. Коллизии в рассуждениях

Из предыдущего раздела следует, что E-структуры являются одним из вариантов частично упорядоченных множеств. В математике известны другие типы у-множеств, например, ***решетки***, у которых не всегда существуют наибольший и наименьший элементы.

Анализ логических ошибок с помощью *E*-структур основан на том, что в них допускаются все возможные сочетания суждений. При этом из исходных посылок получаются некоторые совокупности следствий. Среди них могут оказаться и такие, которые говорят о том, что в посылках содержатся какие-то некорректности. Эти некорректности мы будем называть коллизиями.

Определение 12. ***Коллизиями*** *E*-структуры называются следующие ситуации, появляющиеся при выводе всех следствий:

коллизия парадокса: появление в следствиях по крайней мере одного из суждений типа $X \to \overline{X}$ или $\overline{X} \to X$;

коллизия цикла: появление в графе следствий по крайней мере одного цикла.

Вспомним, что ***циклом*** в графе называется путь, который начинается и заканчивается одной и той же вершиной. Но сначала рассмотрим коллизию парадокса.

6.1. Коллизия парадокса

Что означает отношение $X \to \overline{X}$ в алгебре множеств (например, «Все мои друзья – не мои друзья»)? Вспомним закон непротиворечия: $X \cap \overline{X} = \varnothing$. Из него явно следует, что отношение $X \subseteq \overline{X}$ справедливо только в единственном случае, когда множество *X* пусто. А из другого закона (во втором разделе он идет под номером 4) следует, что $\overline{X}$ в этом случае должно быть равно универсуму. С точки зрения алгебры множеств такую ситуацию нельзя назвать катастрофической, но в обычном рассуждении это может означать, что некоторый объект *X*, в существовании которого мы изначально не сомневались, оказывается несуществующим. Например, из суждения «Все мои друзья – не мои друзья» следует, что друзей у меня нет.

Простейший случай коллизии парадокса возникает, когда в одной *E*-структуре соединены два ***контрарных*** суждения, например, $A \to B$ и $A \to \overline{B}$. Посмотрим, что получится, если построить для этой пары суждений *E*-структуру (рис. 13). Примером такой контрарной пары могут быть, в частности, такие суждения: «Все жирафы живут в Африке» и «Все жирафы не живут в Африке». Если построить контрапозиции исходных посылок, увидим, что между литералами *A* и $\overline{A}$ появились два пути, которые приводят к следствию $A \to \overline{A}$ (рис. 14). Содержательно такое суждение говорит о том, что все жирафы не являются жирафами. Причем получить это следствие можно двумя путями: $A \to B \to \overline{A}$ и $A \to \overline{B} \to \overline{A}$.

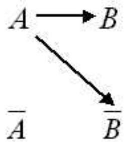


Рис. 13

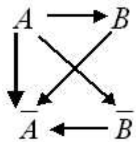


Рис. 14

Другой простой случай коллизии парадокса для пары разных литералов и их отрицаний получим, если соединить в одной E-структуре два суждения $B \to A$ и $\overline{A} \to B$. Сделав аналогичные построения, придем к другой коллизии парадокса $\overline{A} \to A$. Здесь пустым оказывается базовый литерал $\overline{A}$, а универсумом – литерал A.

Попробуем смоделировать коллизию парадокса в Примере 6 (начало раздела 4). Добавим в число посылок суждение $S \to \overline{T}$ («Все разумные люди не укрощают крокодилов»). Может быть, для кого-то это суждение само по себе не кажется парадоксальным, но в нашей системе оно вызывает катастрофу. Если не полениться и построить все следствия для новой системы, убедимся, что в ней появилась коллизия парадокса $T \to \overline{T}$ (на схеме она представлена вертикальной стрелкой). Если считать правильным суждение $S \to \overline{T}$ и заодно все остальные посылки нашего примера, то придется признать, что людей, укрощающих крокодилов, не существует.

Но коллизия парадокса не всегда означает катастрофу. Иногда ее появление позволяет распознать в рассуждении явно лишние термины. В качестве примера такого рассуждения возьмем сорит Л. Кэрролла о парламенте, который был приведен в конце предыдущего раздела в качестве самостоятельного упражнения. Те, кто справился с этой задачей, наверное, смогли убедиться, что в ней отсутствуют коллизии, но некоторые следствия кажутся несколько странными для членов парламента (например, «Все, кто не в здравом рассудке, являются членами палаты лордов» или «Все, кто принимает участие в скачках на мулах, являются членами палаты общин»).

Предположим, что некто решил с помощью хитроумных тестов проверить умственные способности всех членов палаты лордов и в результате исследований получил следующий результат: «Все члены палаты лордов находятся в здравом рассудке». Этот результат имеет форму суждения (кстати, многие факты также можно выразить в форме суждений), и его можно ввести в качестве дополнительной посылки в нашу систему.

Нетрудно убедиться, что в результате такого нововведения появляется коллизия парадокса: «Все, кто не в здравом рассудке, находятся в здравом рассудке». Значит, в нашем универсуме (т. е. среди членов парламента) нет тех, кто не в здравом рассудке, и можно исключить из рассмотрения термин «те, кто не в здравом рассудке», а заодно альтернативный ему термин «те, кто в здравом рассудке». Вместе с этим изъятием (или элиминацией) нужно исключить все связи, соединяющие эти термины с другими.

Удаление термина из рассуждения из-за коллизии парадокса не означает, что он исчезает бесследно. Просто один из терминов (в нашем примере – термин «те, кто в здравом рассудке») становится необходимым свойством всего универсума.

Рассмотрим еще один пример, с помощью которого можно показать явное неравенство друг другу суждения и обратного ему. Если дано некоторое суждение, то ***обратным*** называется суждение, в котором правая и левая части переставлены. Например, суждением, обратным суждению $A \to B$, будет суждение $B \to A$.

Пример *7*. Даны посылки:

Все мои друзья хвастуны и не скандалисты;

Все, кто хвастается, не уверен в себе.

А теперь предположим, что имеются две гипотезы, которые необходимо проверить на совместимость с исходными посылками:

Г1: Все уверенные в себе не скандалисты;

Г2: Все, кто не скандалит, уверены в себе.

Ясно, что обе гипотезы содержат одни и те же термины, но каждая из них обратна по отношению к другой. Сначала запишем исходные суждения в математической форме, для чего введем следующие обозначения: D – мои друзья, H – хвастуны, S – скандалисты, Y – уверенные в себе. Тогда получим:

$D \to (H, \overline{S})$;

$H \to \overline{Y}$.

Строим граф (рис. 15), учитывая, что суждения типа $D \to (H, \overline{S})$, в которых один субъект и несколько предикатов, на графе надо отображать в виде нескольких дуг, направленных от субъекта к каждому из предикатов суждения. Затем для каждого элементарного суждения (т. е. суждения, представленного на графе только одной дугой) строим следствие по правилу контрапозиции (рис. 16). Нетрудно убедиться, что в данном рассуждении коллизии отсутствуют.

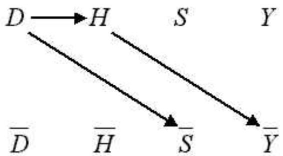


Рис. 15

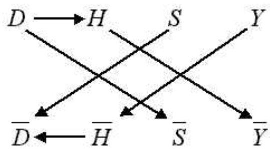


Рис. 16

Попробуйте теперь самостоятельно поочередно проверить на совместимость каждую из заданных гипотез. Для этого надо построить две системы рассуждений, в одной из которых в состав исходных посылок добавлена гипотеза Г1, а в другой – гипотеза Г2. Окажется, что гипотеза Г1 ($Y \to \overline{S}$) не приводит ни к каким коллизиям, в то время как гипотеза Г2 ($\overline{S} \to Y$) после соответствующих построений ведет к противоречию: одно из ее следствий – суждение $D \to \overline{D}$ («Все мои друзья – не мои друзья»). Поскольку есть основание предполагать, что множество «моих друзей» не пусто, то мы принимаем первую гипотезу и отвергаем вторую.

Оказывается, предложенные методы анализа рассуждений применимы не только для терминов, которые обозначают какие-либо конечные перечисляемые множества, но и для терминов, представляющих бесконечные множества с заданными свойствами. Рассмотрим бесконечные множества положительных целых чисел со свойствами делимости. Среди них: множества четных чисел, нечетных чисел, чисел, кратных трем, семи и т. д. Ясно, что каждое из этих множеств потенциально бесконечно. Обозначим их соответственно N_2 (четные числа), N_3 (кратные трем), N_5 (кратные пяти), N_7 (кратные семи). Существуют и дополнения этих множеств, которые тоже потенциально бесконечны: $\overline{N_2}$ (нечетные числа), $\overline{N_3}$ (не делящиеся на три), $\overline{N_5}$ (не делящиеся на пять), $\overline{N_7}$ (не делящиеся на семь).

Пример 8. Пусть имеется некоторое, возможно, бесконечное, множество положительных целых чисел, в котором соблюдаются следующие соотношения:

$N_2 \subseteq (N_3 \cap \overline{N_5})$ (все четные числа делятся на 3 и не делятся на 5);

$N_3 \subseteq \overline{N_7}$ (все числа, кратные 3, не делятся на 7);

$\overline{N_5} \subseteq N_7$ (все числа не делящиеся на 5, кратны 7).

Спрашивается, есть ли в этом множестве четные числа?

Чтобы ответить на вопрос задачи, выполним уже знакомые нам построения. Соотношения включения обозначим, используя стрелки (например, вместо $N_2 \subseteq (N_3 \cap \overline{N_5})$ запишем $N_2 \to (N_3, \overline{N_5})$), и построим граф исходных посылок (рис. 17), а затем для каждого элементарного суждения изобразим его контрапозицию (рис. 18, новые следствия показаны штриховыми стрелками).

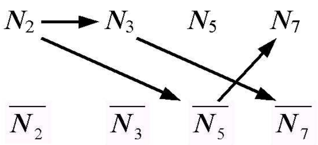


Рис. 17

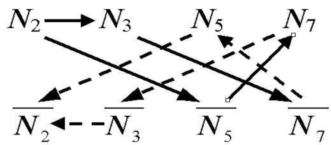


Рис. 18

Выберем минимальный литерал (т. е. тот, в который не входит ни одна дуга). Им оказался литерал N_2 (четные числа), т. е. тот, который нам и нужен для ответа на вопрос задачи. Построим из этого литерала возможные пути:

1-й путь: $N_2 \to N_3 \to \overline{N_7} \to N_5 \to \overline{N_2}$;

2-й путь: $N_2 \to \overline{N_5} \to N_7 \to \overline{N_3} \to \overline{N_2}$.

В обоих случаях получена коллизия парадокса $N_2 \to \overline{N_2}$, из чего следует, что при данных условиях задачи четных чисел в этом множестве не должно быть.

Распознавать коллизию парадокса в E-структурах непосредственно по схеме далеко не всегда удобно, особенно когда в структуре много литералов. Если использовать верхние конусы, то можно сформулировать необходимое и достаточное условие существования этой коллизии. Для этого выполняем следующие действия:

1) выбрать верхние конусы всех минимальных элементов структуры (верхние конусы минимальных элементов называются ***максимальными верхними конусами***);

2) в каждом из выбранных конусов проверить наличие пар альтернативных литералов (например, A и $\overline{A}$).
3) использовать следующий критерий распознавания коллизии парадокса: *если хотя бы в одном из максимальных верхних конусов встречается пара альтернативных литералов, то в структуре имеется коллизия парадокса, в противном случае коллизия парадокса отсутствует*.

Например, в E-структуре из Примера 8 существует только один минимальный элемент (N_2), следовательно, имеется только один максимальный верхний конус

$$N_2^{\Delta} = \{ N_2, N_3, N_5, N_7, \overline{N_2}, \overline{N_3}, \overline{N_5}, \overline{N_7} \},$$

в котором содержится 4 пары альтернативных литералов. Это говорит о том, что в структуре имеется коллизия парадокса.

6.2. Коллизия цикла

Перейдем к рассмотрению другой коллизии – коллизии цикла. Рассмотрим сначала простой цикл между двумя литералами: $A \to B \to A$. Если сопоставить его с отношением включения между множествами, то окажется, что его наличие означает справедливость двух отношений включения $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. А из этого следует равенство множеств A и B друг другу. Соответственно, литералы, которые обозначают эти множества, имеют одно и то же содержание. Рассмотрим следующий пример.

Пример 9. Пусть заданы три посылки:

1) Все, что существует, подтверждается экспериментом.
2) Все неизвестное не подтверждается экспериментом.
3) Все известное существует.

Попробуем принять эти три посылки как аксиомы и построим для них E-структуру. Пусть E – все, что существует, C – все, что подтверждается экспериментом, K – все, что известно. Соответственно, $\overline{E}$ обозначает то, что не существует, $\overline{C}$ – то, что не подтверждается экспериментом, $\overline{K}$ – то, что неизвестно. Теперь представим заданные посылки в виде формальных суждений:

$E \subseteq C$;

$\overline{K} \subseteq \overline{C}$;

$K \subseteq E$.

Если построить граф задачи и применить к посылкам правило контрапозиции, то на рисунке четко обозначатся два цикла: $E \subseteq C \subseteq K \subseteq E$ и $\overline{E} \subseteq \overline{K} \subseteq \overline{C} \subseteq \overline{E}$.

Из законов алгебры множеств следует (строгое доказательство этого утверждения мы опустим), что для любой последовательности включений множеств, образующих цикл типа $A \subseteq B \subseteq C \subseteq \ldots \subseteq A$, справедливо равенство всех множеств, содержащихся в цикле. В нашем примере это означает, что все существующие, подтвержденные в эксперименте и известные явления полностью совпадают друг с другом. Если взять другой полученный в этой задаче цикл, то окажется, что все неизвестные, несуществующие и не подтвержденные в эксперименте явления также эквивалентны друг другу («если я этого не знаю, то это то же самое, что оно не существует»).

В традиционной логике такая ситуация определяется как логическая ошибка «круг в обосновании» (или «порочный круг»). Как тут не вспомнить крылатую фразу из рассказа Чехова: «Этого не может быть, потому что этого не может быть никогда»! Или менее известное в России шуточное высказывание Л. Кэрролла: «Как хорошо, что я не люблю спаржу, – сказала маленькая девочка своему заботливому другу, – ведь если бы я ее любила, то мне пришлось бы ее есть, а я ее терпеть не могу». Все это примеры «порочного круга».

В то же время приведенный Пример 9 трудно отнести к разряду удачных шуток. Скорее всего, это образец демагогии.

Однако коллизия цикла в E-структуре, так же, как и коллизия парадокса, не всегда означает ошибку в рассуждении. Здесь многое зависит от конкретных случаев. Рассмотрим пример, где коллизия цикла позволяет уточнить свойства объектов рассуждения.

Пусть известно, что система содержит какие-то объекты со свойствами E, C и K, и для каждого из этих свойств существует его альтернатива: $\overline{E}$, $\overline{C}$, $\overline{K}$. Например, известно, что в закрытом ящике содержатся предметы с различным сочетанием следующих свойств: они могут быть деревянными (E) либо пластмассовыми ($\overline{E}$); иметь форму шара (C) либо куба ($\overline{C}$); быть красного (K) либо зеленого ($\overline{K}$) цвета. Нам не известно число предметов (их может быть сколь угодно много), но известны некоторые соотношения, представимые в форме суждений. Примеры таких соотношений:

Все деревянные предметы имеют форму куба ($E \subseteq \overline{C}$);

Все предметы зеленого цвета – шары ($\overline{K} \subseteq C$);

Все предметы красного цвета – деревянные ($K \subseteq E$).

Требуется определить, какие сочетания свойств невозможны для предметов, находящихся в этом ящике. Нарисуем схему исходных суждений (рис. 19) и добавим их контрапозиции (рис. 20).

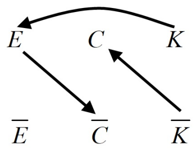


Рис. 19

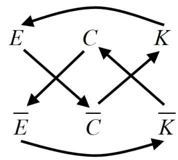


Рис. 20

На рис. 20 отчетливо видны два цикла: $E \subseteq \overline{C} \subseteq K \subseteq E$ и $\overline{E} \subseteq \overline{K} \subseteq C \subseteq \overline{E}$. Значит, свойства E, $\overline{C}$, K присущи одному и тому же множеству и не присущи по отдельности другим множествам нашей системы. То же самое можно сказать и относительно свойств $\overline{E}$, $\overline{K}$, C. Из этого следует, что в ящике могут находиться только деревянные красные кубы и пластмассовые зеленые шары, а все остальные сочетания свойств (их оказывается 6) исключаются. Например, в ящике не должно быть деревянных предметов зеленого цвета.

Анализ коллизий позволяет разделить все типы E-структур на два класса: корректные и некорректные E-структуры. Закрепим эту классификацию с помощью строгих определений.

Определение 13. E-структура ***корректна***, если в ней не содержится никаких коллизий, в противном случае она называется ***некорректной***.

Определение 14. Некорректная E-структура называется ***парадоксальной***, если в ней содержится коллизия парадокса, и ***непарадоксальной*** в противном случае.

В заключение этого раздела рассмотрим еще одну коллизию, которую мы специально не выделили в начале потому, что она по своему статусу отличается от коллизий парадокса и цикла. Рассмотренные ранее коллизии можно считать чисто ***формальными коллизиями***, так как они выявляются только с помощью вычислений. Представим теперь ситуацию, когда из исходных посылок выведены какие-то следствия, и оказалось, что коллизии отсутствуют. Надо бы радоваться, но мы вдруг почему-то решили проверить, насколько наши следствия соответствуют действительности. И вполне возможно, что в следствиях содержатся сведения, которые вступают в конфликт с имеющимися знаниями. Если есть строгие основания считать эти знания истинными, для такой E-структуры можно установить еще один тип коллизии, который мы назовем ***коллизией неадекватности***.

Примеры коллизий неадекватности нередко встречаются в процессе исторического развития научного знания. На определенном историческом этапе в научной картине мира имеется некоторая теория, с помощью которой объясняются многие известные факты или результаты экспериментов. Но наука не стоит на месте: появляются новые факты, многие из которых соответствуют существующей теории (т. е. являются следствиями ее исходных положений). Вместе с тем иногда появляются факты (или экспериментальные данные), противоречащие следствиям существующей теории. Такие противоречия мы и назвали коллизией неадекватности. И тогда в науке наступает этап споров и дискуссий, который предшествует рождению новой теории. Таким образом, коллизию неадекватности можно считать инициатором новых научных открытий.

7. Частные суждения

Ранее мы рассматривали примеры с суждениями, в которых для субъекта явно использовался термин «все» или его присутствие подразумевалось. Даже если в качестве субъекта использовался единичный объект (например, «Онегин» или «Сократ»), то все равно в суждении он рассматривался как целое неразделимое множество, содержащее единственный элемент и полностью включенное во множества, играющие в этом суждении роль предикатов. Далее мы изучим ситуации, когда в суждениях к субъекту применен термин «некоторые», т. е. когда используются частные суждения. В силлогистике они нередко входят в состав посылок или выводятся в качестве заключения.

В логике термины «все» и «некоторые» играют особую роль. Они называются ***кванторами***, и для них даже введены специальные общепринятые знаки: $\forall$ (все – от английского слова *All*) и $\exists$ (некоторые, существует – от английского слова *Exist*). В E-структурах отдельные символы для кванторов не используются. Для литералов обычных суждений предполагается, что на них «навешен» квантор «все» (например, $A \to B$ переводится как «Все A есть B»), а для квантора «некоторые» предлагается использовать специальный вид суждений – ***частные суждения***. По смыслу частное суждение – это суждение, в котором утверждается или проверяется существование некоторого (как правило, безымянного) множества с определенным набором свойств (предикатов). Причем имя этого множества отсутствует в списке литералов структуры, и тогда для его обозначения мы должны использовать новый литерал. А чтобы отличить его от основных (*базовых*) литералов, будем называть его ***неопределенным литералом***.

В силлогистике Аристотеля используется всего два типа частных суждений, это ***частноутвердительное*** суждение «Некоторые A есть B» и ***частноотрицательное*** суждение «Некоторые A не есть B». В таких суждениях, выраженных на естественном языке, смысловой акцент переносится на первый термин (A), хотя на самом деле очевидно, что они описывают случаи, когда пересечение множеств, обозначенных терминами A и B (в первом суждении) или A и $\overline{B}$ (во втором суждении), непусто. Поэтому суждение «Некоторые A есть B» равносильно суждению «Некоторые B есть A», а суждение «Некоторые A не есть B» – суждению «Некоторые не-B есть A». Данная особенность частных суждений была в свое время отмечена Льюисом Кэрроллом [8]. Она легко обосновывается, если проанализировать частные суждения с помощью Жергонновых отношений (см. раздел 2).

Чтобы отличить базовые литералы от неопределенных, будем обозначать последние буквами греческого алфавита. Например, суждение «Некоторые A есть B» можно записать как $\alpha \rightarrow (A, B)$, а суждение «Некоторые A не есть B» – как $\delta \rightarrow (A, \overline{B})$. Чтобы избежать путаницы, необходимо помнить следующее: хотя разные частные суждения начинаются с одного и того же слова «некоторые», для записи субъектов разных частных суждений (если это специально не оговаривается) необходимо использовать разные символы.

Для сравнения приведем общепринятую формулировку частных суждений в терминах математической логики: 1) $\exists x(A(x) \wedge B(x))$ и 2) $\exists x(A(x) \wedge \neg B(x))$, которые можно выразить содержательно так: 1) «Существует хотя бы один объект x, который одновременно обладает свойствами A и B» и 2) «Существует хотя бы один объект x, который одновременно обладает свойствами A и не-B». При решении задач моделирования и анализа полисиллогизмов на основе E-структур отпадает необходимость использования кванторов. Такое нововведение позволяет в пределах данной системы рассуждений значительно упростить анализ.

Определение 15. ***Частным*** называется суждение, в котором утверждается в посылках или доказывается в следствиях непустота пересечения двух или более множеств, обозначенных соответствующими базовыми или неопределенными литералами.

Из этого определения становится понятной идея обобщения частных суждений Аристотелевской силлогистики: к таким суждениям относятся суждения, у которых на месте субъекта размещается некоторый новый неопределенный литерал, а число предикатов суждения может быть любым.

В предыдущих разделах для получения следствий использовались правила вывода, которые соответствовали свойствам отношения включения в алгебре множеств. Но для вывода частных суждений этих правил вывода недостаточно. Здесь требуется иная постановка задачи, а именно: *в конкретной E-структуре необходимо доказать, что пересечение некоторых множеств при заданных исходных посылках не является пустым.*

Поэтому и методы решения задачи вывода частных суждений значительно отличаются от методов вывода общих суждений. К изучению этих методов мы и приступим. Но прежде рассмотрим одну ситуацию, которая может ввести в заблуждение при использовании частных суждений в качестве посылок. Ранее мы рассматривали пары *контрарных* суждений типа $A \to B$ и $A \to \overline{B}$, при совмещении которых в рассуждении образуется коллизия парадокса. Попробуем «ослабить» второе суждение, т. е. сформулировать его не как общее, а как частное суждение $\alpha \to (A,\ \overline{B})$. Наша *E*-структура в этом случае будет содержать две посылки: $A \to B$ и $\alpha \to (A,\ \overline{B})$.

Если применить к этой *E*-структуре известные нам правила вывода, то в результате получим коллизию парадокса $\alpha \to \overline{\alpha}$. Из нее следует, что пересечение множеств A и $\overline{B}$ равно пустому множеству. Та же ситуация будет, если преобразовать в частное не второе, а первое суждение. Полученная *E*-структура

$$\alpha \to (A, B);\ A \to \overline{B}$$

тоже окажется парадоксальной: при выводе всех следствий получим ту же коллизию парадокса $\alpha \to \overline{\alpha}$. Пары таких суждений оказываются логически несовместимыми. В традиционной логике их отличают от контрарных суждений и называют ***контрадикторными***.

Пример 10. Рассмотрим известный тип силлогизма (в Аристотелевой силлогистике – это модус EAO 4-й фигуры категорического силлогизма), в котором из двух общих суждений можно вывести только частное суждение.

1-я посылка: Ни одно млекопитающее не есть рыба.

2-я посылка: Все рыбы дышат жабрами.

Заключение: Некоторые из тех, кто дышит жабрами, не являются млекопитающими.

Из биологии известно, что все дышащие жабрами не относятся к классу млекопитающих. В заключении же говорится только о некоторых из них. Но в данном случае мы не имеем права говорить о всех дышащих жабрами, потому что при логическом выводе необходимо исходить не из наших знаний или заблуждений, а только из того, что дано в посылках. А из заданных посылок по правилам Аристотелевской силлогистики выводимо только частное суждение. Посмотрим, что получится, если воспользоваться *E*-структурами.

Обозначим M – млекопитающие, P – рыбы, $Ж$ – дышащие жабрами. Тогда посылки можно представить в виде таких формул:

$M \to \overline{P}$; $P \to Ж$.

Здесь нужно сделать одно пояснение. Суждение на русском языке типа «Ни одно A не есть B» в традиционной логике означает то же самое, что и суждение типа «Каждое A не есть B», и в алгебре множеств соответствует включению соответствующего множества A в дополнение множества B. Наличие двух отрицаний в одном суждении в данном случае обусловлено не двумя фактическими отрицаниями, а некоторыми нелогичными особенностями синтаксиса русского языка. На диаграммах Эйлера соотношения, выраженные этими суждениями, изображаются в виде пары непересекающихся множеств A и B, из чего следует справедливость включения $A \subseteq \overline{B}$.

Нарисуем граф рассуждения (рис. 21) и, используя правило контрапозиции, изобразим диаграмму Хассе этой структуры (рис. 22).

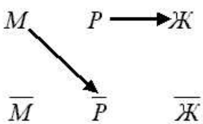


Рис. 21

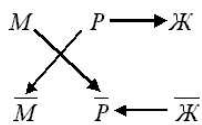


Рис. 22

Из схемы ясно, что вывести новое общее суждение из данных посылок невозможно. Запишем частное заключение нашего силлогизма: $\alpha \to (Ж, \overline{M})$. Спрашивается, почему для частного заключения выбраны именно эти литералы? Посмотрим на схему. Из нее видно, что непустое множество P включено как в $Ж$, так и в $\overline{M}$, из чего следует, что пересечение этих двух множеств не должно быть пустым. А раз так, то заключение $\alpha \rightarrow (Ж, \overline{M})$ верно при любых соотношениях терминов, лишь бы они не были пустыми.

Теперь понятно, что для анализа правильных частных заключений необходимо исследовать верхние конусы литералов: *любое множество непустых литералов в верхнем конусе литерала представляют множества с непустым пересечением.* Но здесь интерес представляют только те литералы, которые не связаны друг с другом (для связанных литералов непустота пересечения очевидна).

Правила вывода частных заключений в E-структурах:

1) для заданной E-структуры построить контрапозиции всех посылок;

2) выбрать все минимальные литералы S_i и для каждого из них построить верхние конусы S_i^{Δ};

3) в полученных верхних конусах выбрать пары, тройки и т. д. литералов, не связанных друг с другом;

4) из полученных на 3-м шаге множеств сформировать частные заключения, присоединив к ним слева неопределенный литерал со стрелкой.

Рассмотрим применение этого алгоритма для Примера 10. В структуре имеется три минимальных литерала: M, P и $\overline{Ж}$. В верхних конусах $M^{\Delta} = \{M, \overline{P}\}$ и $\overline{Ж}^{\Delta} = \{\overline{Ж}, \overline{P}\}$ несвязанных литералов нет, зато в верхнем конусе $P^{\Delta} = \{P, Ж, \overline{M}\}$ имеется пара несвязанных литералов $(Ж, \overline{M})$. Из них можно сформировать частное заключение $\alpha \rightarrow (Ж, \overline{M})$.

При анализе частных заключений интерес представляют только верхние конусы минимальных литералов, они называются ***максимальными верхними конусами***. Все остальные литералы содержатся в максимальных верхних конусах, и поэтому их верхние конусы включены в соответствующие максимальные конусы.

Пример 11. Еще одно применение частных суждений рассмотрим на примере анализа парадокса «Лжец», открытого древнегреческим философом Эвбулидом (IV век до н. э.). Суть его заключается в следующем. Критянин Эпименид сказал: «Все критяне лжецы». Нужно, используя логический анализ, определить, солгал Эпименид или сказал истину.

Рассмотрим сначала этот парадокс на содержательном уровне. Если Эпименид сказал истину, то выходит, что все критяне лжецы, а поскольку Эпименид критянин, то он не мог сказать истину. Предположим теперь, что Эпименид солгал. Тогда получается, что его высказывание ложно и все критяне не лжецы, а раз так, то Эпименид, будучи критянином, не мог солгать. Так что любое предположение приводит к противоречию.

Посмотрим, что получится, если использовать для анализа этого парадокса *E*-структуру. Выберем в качестве универсума множество людей. Среди этих людей встречаются критяне (*К*) и не критяне ($\overline{К}$), лжецы (*Л*) и правдивые ($\overline{Л}$). В число этих людей входит также критянин Эпименид (*Э*) и все остальные люди ($\overline{Э}$). Сформулируем теперь исходные суждения для ситуации, когда Эпименид сказал неправду. В этом случае можно считать Эпименида лжецом, а суждение «Все критяне лжецы», которое он высказал, необходимо заменить на его антитезу «Все критяне не лжецы». Тогда получим:

$Э \to (К, Л)$ – Эпименид – критянин и лжец;

$К \to \overline{Л}$ – Все критяне не лжецы.

Теперь построим граф исходных посылок и их контрапозиций (рис. 23).

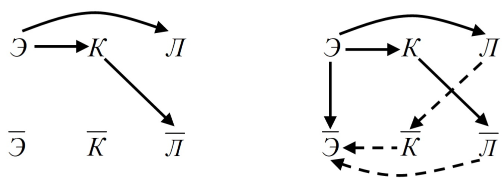


Рис. 23

Одним из следствий исходных посылок оказалось суждение $Э \to \overline{Э}$, т. е. коллизия парадокса. Из этого получается, что множество «Эпименид» – пустое множеством, т. е. Эпименид в данной системе посылок не может существовать. Посмотрим, что получится, если в качестве истинного взять не общее, а частное суждение «Некоторые критяне не лжецы». Как мы уже знаем, оно является контрадикцией к суждению «Все критяне лжецы», и при совмещении с ним вызывает коллизию парадокса. Кроме того, в математической логике доказано, что отрицанием суждения «Все критяне лжецы» будет не «Все критяне не лжецы», а «Некоторые критяне не лжецы». Оказывается, что при подстановке именно этого суждения в структуру парадокса не возникает. Для проверки запишем соответствующую E-структуру:

$Э \to (К, Л)$ – Эпименид критянин и лжец;

$\alpha \to (К, \overline{Л})$ – Некоторые критяне не лжецы.

Построим граф исходных посылок и их контрапозиций (рис. 24).

Нетрудно убедиться, что коллизии парадокса не появилось. Критянин Эпименид – лжец, и он включен в состав тех, кто не является «некоторыми» правдивыми критянами (следствие $Э \to \overline{\alpha}$).

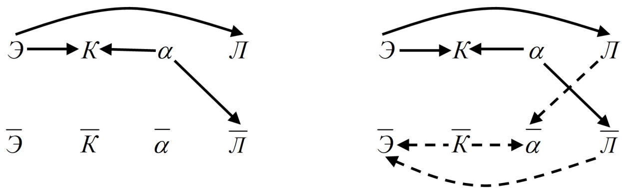


Рис. 24

Рассмотрим еще один случай применения частных суждений. Как известно, слово «некоторые» имеет расширительный смысл «некоторые, а возможно, и все». Спрашивается, как можно сузить этот смысл в выражении, например, как отобразить суждение «Только некоторые A есть B»? Оказывается, сделать это легко, но потребуются два суждения:

$\alpha \to (A, B)$; $\beta \to (A, \overline{B})$.

Второе суждение показывает, что некоторая часть A (в данном случае β) находится за пределами B, поэтому суждение $A \to B$ недопустимо. Можно убедиться, что при добавлении суждения $A \to B$ к предыдущим суждениям инициируется коллизия парадокса $\beta \to \overline{\beta}$.

8. Формирование и проверка гипотез

Из предыдущих разделов ясно, что в E-структурах возможны только два типа заключений: 1) общие суждения, которые выводятся с помощью правил транзитивности и контрапозиции, и 2) частные суждения, формируемые с помощью верхних конусов литералов. Однако внимательное изучение многих примеров показывает, что иногда добавление некоторых общих или частных суждений, сформированных по другим правилам, не вызывает коллизий. Так, если в Пример 10 добавить новое суждение $\delta \to (М, \overline{Ж})$, то, построив граф рассуждения, убедимся, что коллизий не образуется, хотя это суждение не является заключением силлогизма: множество $\{M, \overline{Ж}\}$ в правой части этого суждения не включено ни в один максимальный верхний конус структуры. Поэтому в данном случае добавленное суждение есть не заключение, а гипотеза, не инициирующая коллизий.

В логике методы анализа рассуждений делятся на два класса: ***дедуктивные выводы*** и ***правдоподобные рассуждения*** (или недедуктивные методы). Для выполнения дедуктивных выводов необходимы некоторые ***правила логического вывода***, определенные в ***аксиоматической системе***, которая моделирует рассуждения, и во многом соответствующие правилам логического вывода, используемым в строгих математических доказательствах.

Однако логический анализ не ограничивается только дедуктивными выводами. Дедукция, как правило, работает на заключительном этапе мыслительных процессов, когда построены некоторые исходные утверждения, имеющие статус аксиом. Тогда получение следствий (теорем) из аксиом и проверка того, что данное утверждение есть следствие этих аксиом, относятся к дедукции. Нередко роль аксиом выполняют посылки, которые формируются с помощью обобщений и творческой интуиции. Эта мыслительная деятельность относится уже к правдоподобным рассуждениям.

Понятно, что логика, по-видимому, не позволяет отобразить все многообразие творческого поиска. Но какие-то его разновидности все же можно воспроизвести, используя строгие математические методы. Некоторые методы правдоподобных рассуждений удается реализовать с использованием математики, и вполне возможно сделать это на компьютере. К ним относятся ***индукция*** (в узком смысле поиск закономерностей на примерах), ***абдукция*** (поиск объяснений для некоторых неожиданных и не выводимых из аксиом фактов или примеров) и ***формирование гипотез*** (поиск новых утверждений, не следующих из принятых аксиом).

К примерам индукции относится поиск немецким астрономом Иоганном Кеплером (1571 – 1630) математических законов движения планет вокруг Солнца на основе данных астрономических наблюдений. Он исходил не из законов движения, открытых позже Ньютоном, а сравнивал орбиты небесных тел и графики различных аналитических функций. Но индуктивные выводы не всегда бывают безусловно верными. Если, допустим, путешествуя по Европе и Азии, мы встречаем только белых лебедей, то можем сделать индуктивный вывод «Все лебеди белые». Но, если попадем в Австралию, то придется изменить свою точку зрения, так как там встречаются черные лебеди. В настоящее время многие методы поиска закономерностей на примерах развились в целую отрасль компьютерных технологий, которая получила название Data Mining.

Абдукцию мы рассмотрим позже, а в этом разделе познакомимся с гипотезами. По сути, ***гипотеза*** – это новое знание, которое не следует из принятых аксиом (или посылок). В то же время, чтобы гипотеза была ***корректной***, она не должна противоречить аксиомам – для E-структур это означает, что при добавлении сформулированной гипотезы в конкретную структуру не происходит логических конфликтов в виде коллизий. Мы уже немного познакомились с анализом гипотез в Примере 7 (раздел 6).

Рассмотрим сначала самые простые случаи такого бесконфликтного обновления знаний. Пусть исходное знание представлено корректной E-структурой R, содержащей множество T базовых терминов. Тогда в простейшем случае бесконфликтного обновления знаний новое суждение (допустим, это $A \to B$) содержит термины (A и B), которые не входят в состав базовых терминов E-структуры R. Ясно, что при добавлении этого суждения в R какие-либо коллизии невозможны. Например, если к посылкам из Примера 6 (раздел 3) добавить суждение «Все лебеди белые», то увидим, что его содержание никак не связано с терминами из этого примера. Суждения такого типа нейтральны относительно исследуемого знания. В силу тривиальности этот вариант никакого интереса не представляет.

Более интересен случай, когда в новом суждении, наряду с новыми терминами, содержатся базовые термины E-структуры R. Самый простой вариант: в систему добавляется новое суждение, но в ней содержится только один из терминов нового суждения. Тогда независимо от того, относится новый термин к предикатам или субъектам данного суждения, наша система «воспримет» новое суждение без всяких коллизий. За счет постепенного наращивания описанных выше случаев происходит неограниченное расширение любой исходной системы.

Для иллюстрации рассмотрим полисиллогизм Л. Кэрролла, использованный в Примере 6 (раздел 3).

1) Все малые дети неразумны.

2) Все, кто укрощает крокодилов, заслуживают уважения.

3) Все неразумные люди не заслуживают уважения.

Добавим в него еще одно суждение: «Все обманщики не заслуживают уважения». В этом суждении предикат представлен термином, уже содержащимся в системе, а субъект – новым термином («обманщики»). В результате такого пополнения система также останется корректной, а число базовых терминов системы увеличится на два («обманщики» и их отрицание – «не обманщики»). В новой системе появляются интересные особенности, которые будут рассмотрены несколько позже.

Бесконфликтность системы, обновленной за счет такой гипотезы, можно проверить, применив правила вывода и методы анализа коллизий. Более сложен случай, когда в новом суждении предусматривается новая связь между двумя и более терминами исходной системы. Частично такой случай был рассмотрен в предыдущем разделе, когда с помощью верхних конусов в корректной E-структуре строились частные суждения, в которых появлялись уже новые неопределенные термины. Этот метод позволяет сформировать частные заключения, но не гипотезы. Далее мы увидим, что эти частные суждения существенно отличаются от частных суждений, сформированных по другим правилам.

Определение 16. Частное суждение, образованное с помощью верхних конусов E-структуры, называется ***безусловным частным суждением***.

Рассмотрим пример другого (*условного*) частного суждения. Пусть задана простая E-структура с двумя суждениями: $A \to B$ и $B \to C$. Построим ее следствия и выделим все максимальные верхние конусы:

$A^{\Delta} = \{A, B, C\}$; $\overline{C}^{\Delta} = \{\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}\}$.

Посылки и следствия данной E-структуры представлены в виде графа на рис. 25.

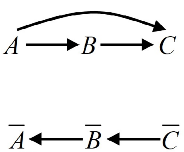


Рис. 25

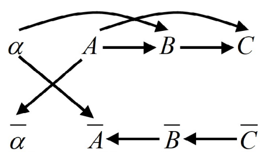


Рис. 26

Испытаем для этой E-структуры частное суждение $\alpha \to (\overline{A}, B)$. Совокупность литералов $\{\overline{A}, B\}$ не включена ни в один из максимальных верхних конусов, поэтому данное суждение не является безусловным.

А будет ли структура корректной, если присоединить это суждение к исходной системе (рис. 26)?

Проверка показывает, что корректность структуры не нарушится. Но в чем заключается «условность» данного частного суждения? Точнее, при каких условиях или корректных изменениях в структуре добавление этого суждения в структуру приведет к коллизии? Дело в том, что в структуре содержится соотношение $A \to B$ (т. е. в терминах алгебры множеств $A \subseteq B$ – нестрогое включение), и при этом допускается возможность равенства A и B. В то же время частное суждение $\alpha \to (\overline{A}, B)$ означает, что в множестве B содержится хотя бы один элемент из дополнения множества A и, следовательно, равенство A и B невозможно. Другими словами, рассматриваемое частное суждение вводит в структуру ограничение, которое не имело бы места, если бы к структуре добавлялось безусловное частное суждение.

Определение 17. Частное суждение, правая часть которого содержит литералы, не включенные в совокупности ни в один из верхних конусов E-структуры, называется ***условным частным суждением***.

В то же время добавление в структуру на рис. 25 другого частного суждения может инициировать коллизию парадокса. Так, нетрудно проверить, что суждение $\beta \to (A, \overline{B})$ ведет к коллизии парадокса $\beta \to \overline{\beta}$.

Данный пример иллюстрирует тот факт, что добавление новых суждений, содержащих два и более терминов исходной системы, не всегда является простым делом и порой требует тщательной проверки.

Рассмотрим методы проверки гипотез, содержащих только базовые литералы.

Пример 12. Пусть E-структура содержит два исходных суждения $B \to A$ и $B \to C$. Ее можно также представить одним сложным суждением $B \to (A, C)$. Содержательным примером такой E-структуры может быть следующий силлогизм:

1) Все тигры (B) – хищники (A);
2) Все тигры – млекопитающие (C).

Для анализа этой структуры построим ее граф (рис. 27).

$$\boldsymbol{A \leftarrow B \rightarrow C}$$

$$\boldsymbol{\overline{A} \rightarrow \overline{B} \leftarrow \overline{C}}$$

Рис. 27

Попробуем подобрать корректную гипотезу, содержащую только базовые литералы. Методом проб можно убедиться, что гипотеза $A \to \overline{B}$ при добавлении в структуру инициирует коллизию парадокса $B \to \overline{B}$. В то же время гипотеза $\overline{C} \to A$ коллизий не вызывает (хотя это еще не значит, что она соответствует реальности, речь здесь идет о формальном этапе проверки).

Можно упростить метод проверки корректности гипотез – для этого не обязательно достраивать схему и проверять, есть ли в ней коллизии цикла или парадокса. Проверку корректности гипотезы, содержащей только базовые литералы, можно упростить, если воспользоваться соотношением, выраженным следующей теоремой. Но сначала необходимо определить еще одну операцию (инверсию), которая часто используется в *E*-структурах.

Определение 18. ***Инверсией*** ($Inv(S)$) произвольного множества S литералов является множество литералов такое, что каждому литералу $L_i \in S$ ставится в соответствие литерал $\overline{L_i} \in Inv(S)$.

Другими словами, для выполнения инверсии во множестве литералов мы вместо каждого литерала из этого множества записываем его дополнение. Так, если $S = \{A, \overline{B}, C\}$, то $Inv(S) = \{\overline{A}, B, \overline{C}\}$. Инверсия обладает некоторыми интересными свойствами. В частности, нетрудно проверить, что при двукратном применении инверсии к определенному множеству литералов будет получено то же самое множество, т. е. $Inv(Inv(S)) = S$.

Теорема 3. *Новое базовое суждение $A \to B$ есть корректная гипотеза в корректной E-структуре G, если совместно соблюдаются два равенства:*

(i) $A^{\nabla} \cap B^{\Delta} = \varnothing$;

(ii) $A^{\nabla} \cap Inv(B^{\Delta}) = \varnothing$.

Доказательство. Предположим, что $A^{\nabla} \cap B^{\Delta} \neq \varnothing$. Это означает, что существует некоторый литерал W, одновременно принадлежащий и A^{∇}, и B^{Δ}. Отсюда следует, что W – предшественник литерала A и потомок литерала B. Поэтому, когда литералы A и B соединяются дугой $A \to B$ (т. е. мы добавляем гипотезу в структуру), получается, что через литералы A и B существует путь из W в W, что означает коллизию цикла. Таким образом, необходимость условия (i) доказана. Предположим, что $A^{\nabla} \cap Inv(B^{\Delta}) \neq \varnothing$. Это означает существование литерала W такого, что W

есть предшественник A, а $\overline{W}$ – потомок литерала B. Тогда при добавлении гипотезы $A \to B$ в структуру появляется путь из W в $\overline{W}$, означающий коллизию парадокса. Таким образом, необходимость условия (ii) доказана. *Конец доказательства*.

Из доказательства Теоремы 3 ясно, что в структуре имеется коллизия цикла в том случае, когда не соблюдается условие (i), а коллизия парадокса, – когда не соблюдается условие (ii).

Рассмотрим, как можно использовать Теорему 3 для решения предыдущей задачи (рис. 27). Предположим, что надо проверить корректность гипотезы $B \to \overline{C}$. Строим для этих литералов соответствующие конусы:

$B^{\nabla} = \{A, B\}$; $\overline{C}^{\Delta} = \{\overline{B}, \overline{C}\}$; $Inv(\overline{C}^{\Delta}) = \{B, C\}$.

Проверяем условия Теоремы 3:

$B^{\nabla} \cap \overline{C}^{\Delta} = \varnothing$; $B^{\nabla} \cap Inv(\overline{C}^{\Delta}) = \{B\}$.

Отсюда следует, что при добавлении гипотезы $B \to \overline{C}$ коллизия цикла не образуется, зато появляется коллизия парадокса.

Рассмотрим для той же задачи гипотезу $\overline{C} \to A$. Вычисляем нужные для проверки множества: $\overline{C}^{\nabla} = \{\overline{C}\}$; $A^{\Delta} = \{A\}$; $Inv(A^{\Delta}) = \{\overline{A}\}$. Проверка показывает, что равенства, предусмотренные в Теореме 3, верны и, следовательно, гипотеза $\overline{C} \to A$ не инициирует коллизий.

9. Абдукция

В философии и логике считается, что индукция и абдукция – более высокие по сравнению с дедукцией формы мышления, непосредственно связанные с творческим мышлением, т. е. с мышлением, результатом которого являются новые знания. Но в современной логике отсутствует однозначное определение абдукции. Считается, что абдуктивные выводы были предложены одним из создателей математической логики Ч. Пирсом. Исследуя теорию силлогистики Аристотеля, он предложил модифицировать ее, чтобы получать не только дедуктивные выводы, но и правдоподобные рассуждения. Рассмотрим в качестве примера один из силлогизмов Л. Кэрролла. Даны посылки:

1) Все молчаливые существа не забавны;

2) Все улитки молчаливы.

Если использовать правила силлогистики, то получим следствие:

Все улитки не забавны.

То же следствие можно легко получить и с помощью E-структур. Из схемы этого силлогизма Пирс построил два других типа рассуждения. Одно из них он назвал принятием гипотезы, а позже предложил назвать «абдукцией». Вот это рассуждение.

Исходная посылка: Все улитки молчаливы.

Получен результат: Все улитки не забавны.

Далее рассуждаем так: чтобы этот результат был следствием исходной посылки, необходимо в состав посылок добавить гипотезу «Все молчаливые существа не забавны». Поиск такой посылки как раз и есть абдуктивный вывод.

Для простого силлогизма подобная схема рассуждения была известна намного раньше исследований Ч. Пирса, но она имеет другое название – ***энтимема***, т. е. рассуждение с пропущенной посылкой. Рассмотрим подробно известный пример. Дано рассуждение «Этот человек не знает дорогу к реке. Следовательно, он не местный житель». Это, по сути, силлогизм с пропущенной посылкой. Для его анализа используем E-структуры.

Введем обозначения: H – этот человек, K – знающий дорогу к реке, V – местный житель. Исходная посылка имеет вид $H \to \overline{K}$, а предполагаемое следствие – $H \to \overline{V}$. Данное рассуждение можно представить в виде диаграммы (рис. 28). Здесь посылка изображена сплошной линией, предполагаемое следствие – пунктиром. Чтобы суждение $H \to \overline{V}$ стало действительным следствием, необходимо, чтобы из вершины H был путь к вершине $\overline{V}$. Достаточно посмотреть на рисунок, чтобы сразу же найти «недостающее звено»: $\overline{K} \to \overline{V}$ (рис. 29). Контрапозиция этого суждения – $V \to K$ («Все местные жители знают дорогу к реке»).

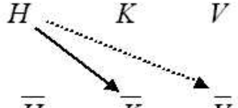


Рис. 28

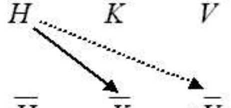


Рис. 29

Энтимема встречается весьма часто и в житейских диалогах, и в литературных произведениях. Так, в книге [9] исследовались тексты литературных произведений с целью установить, как часто в них используются энтимемы. Например, в литературном произведении в 400 страниц (роман Г. Манна «Верноподданный») содержится 1943 умозаключения, из них 1938 в форме энтимем.

Мы порой даже не замечаем, что такие языковые конструкции, как «Он говорил зычно, поскольку был туговат на ухо», «Петров – снайпер, так как он обладает твердой рукой и острым зрением», по сути, есть энтимемы (в первом предложении пропущена посылка «Все туговатые на ухо говорят зычно», а во втором – «Все обладающие твердой рукой и острым зрением – снайперы»). Во втором предложении, если действовать по правилам логики, восстанавливается ложная посылка (в жизни отнюдь не все, обладающие твердой рукой и острым зрением, являются снайперами), но при поверхностном восприятии или при искаженном представлении о логике эта ошибка не замечается. Искусные ораторы нередко пользуются энтимемами для того, чтобы косвенным путем внедрить в сознание публики неявно сформулированные сомнительные или ложные посылки.

Следуя Ч. Пирсу, будем называть ***абдукцией*** методы анализа рассуждений, в которых требуется найти подходящую гипотезу для того, чтобы построить корректную логическую связь между исходными посылками и предполагаемым следствием из этих посылок. В отличие от энтимемы, абдукция используется в более сложных случаях, чем простой силлогизм.

Абдукция встречается не только в научном анализе, но и во многих других мыслительных актах, даже в такой, казалось бы, далекой от логики сфере, как юмор. В качестве примера проанализируем анекдот, связанный с известным британским политиком Уинстоном Черчиллем. Как известно, он прекрасно разбирался в тонкостях языка (ему, кстати, была присуждена Нобелевская премия по литературе за мемуары о Второй мировой войне), и его остроты далеко не всем приходились по вкусу. Однажды чем-то обиженная на него леди Астор сказала ему: «Если бы вы были моим мужем, я бы подсыпала вам яд в кофе». Черчилль тут же ответил: «Если бы вы были моей женой, то я бы этот кофе выпил».

Смешное обычно не принято комментировать. Но здесь иная ситуация – ставится задача найти связь комического с абдукцией. Ответ Черчилля внешне безобиден. Однако при этом «домысливается», что его ответу должна предшествовать фраза «А вы мне так неприятны, что … » и предпосылка о том, что в моделируемой ситуации говорящий знает о насыпанном яде. Эти недостающие звенья являются абдуктивным выводом из произнесенных фраз и ситуации, и смех (по крайней мере, у людей с чувством юмора) вызывает не только этот скрытый намек, но не в последнюю очередь радость, связанная с его самостоятельной и быстрой «расшифровкой».

Рассмотрим шуточную задачу.

Найдите пропущенную посылку в рассуждении:

Титулованные особы не закладывают за воротник, поскольку все, кто не носит цилиндров, не являются титулованными особами, и к тому же любой, кто закладывает за воротник, сморкается в галстук.

Обозначим $Т$ – титулованные особы, $Ц$ – те, кто носят цилиндры, $З$ – те, кто закладывают за воротник, $С$ – те, кто сморкаются в галстук. Ясно, что предполагаемое следствие рассуждения есть суждение $Т \to \overline{З}$, а посылки имеют вид $\overline{Ц} \to \overline{Т}$ и $З \to С$.

Построим граф рассуждения (рис. 30).

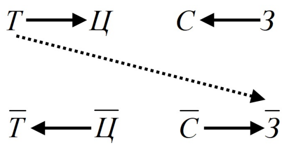


Рис. 30

Из рисунка видно, что пути из $Т$ в $\overline{З}$ нет, но, чтобы он появился, достаточно добавить суждение $Ц \to \overline{С}$. Значит, один из возможных ответов задачи: «Те, кто носят цилиндры, не сморкаются в галстук».

Рассмотрим более сложный пример, где вместо содержательных терминов используются обычные символы. Пусть даны посылки $A \to B$; $C \to (\overline{B}, \overline{D})$; $E \to D$ (второе суждение означает «Все C есть не-B и не-D»). Предполагаемое следствие: $A \to \overline{E}$. Нужно восстановить недостающие посылки, не вводя при этом новых литералов.

Для исходных посылок построим диаграмму (рис. 31), пунктирной дугой обозначим предполагаемое следствие. Затем добавим в схему все контрапозиции исходных суждений (рис. 32).

Из рисунка ясно, что из A в $\overline{E}$ нет пути, то есть суждение $A \to \overline{E}$ – не следствие исходных посылок, и чтобы оно стало таковым, нужно найти гипотезу, подходящую в качестве новой посылки. При взгляде на рис. 32 кажется, что требуемые решения дают гипотезы $B \to C$ или

$\overline{C} \to \overline{D}$. Однако проверка показывает, что каждая из них инициирует коллизию парадокса.

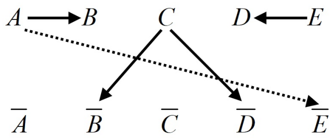


Рис. 31

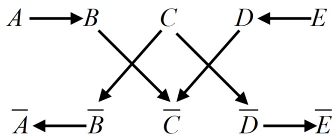


Рис. 32

Можно попробовать перебрать и проверить все возможные новые суждения, пока не найдется подходящего, но их число может оказаться большим, и процесс станет весьма трудоемким. Нами предложен более простой способ, описываемый таким алгоритмом.

Алгоритм поиска абдуктивных выводов. Даны исходные посылки и предполагаемое следствие, допустим, $P \to Q$. Тогда выполняются следующие действия:

Шаг 1. Построить структуру с исходными посылками и затем вывести контрапозиции к каждой из посылок.

Шаг 2. Проверить существование в полученной структуре пути из P в Q. Если такого пути нет, то переход к Шагу 3, иначе выход из алгоритма с ответом «Для данной задачи абдуктивный вывод не требуется».

Шаг 3. Используя построенную на Шаге 1 структуру, построить верхний конус P^{Δ} и нижний конус Q^{∇}.

Шаг 4. Из полученных на Шаге 3 множеств записать все возможные пары (X_i, Y_j), где $X_i \in P^{\Delta}$ и $Y_j \in Q^{\nabla}$.

Шаг 5. Для каждой пары, полученной на Шаге 4, проверить, используя Теорему 3 (раздел 8), корректность гипотезы $X_i \to Y_j$. Если гипотеза некорректна, то соответствующая пара исключается из списка. Оставшиеся пары дают возможные ответы. *Конец алгоритма*.

Неформальное пояснение к алгоритму. С его помощью мы ищем недостающие звенья цепи $P \to \ldots \to Q$, поскольку разрывы в ней означают, что суждение $P \to Q$ не следует из исходных посылок. Список пар, полученных на Шаге 4, есть полный список таких недостающих звеньев, т. е. гипотез. Но некоторые из них могут быть некорректными, поэтому необходим Шаг 5.

Рассмотрим, как работает этот алгоритм применительно к нашей задаче.

Шаг 1 и *Шаг 2* уже выполнены.

Шаг 3. Из рис. 32 получаем $A^{\Delta} = \{A, B, \overline{C}\}$, $\overline{E}^{\nabla} = \{\overline{E}, C, \overline{D}\}$.

Шаг 4. Список возможных пар:

$(A, \overline{E})$, (A, C), $(A, \overline{D})$, $(B, \overline{E})$, (B, C), $(B, \overline{D})$, $(\overline{C}, \overline{E})$, $(\overline{C}, C)$, $(\overline{C}, \overline{D})$.

Шаг 5. Из этого списка сразу можно исключить пары $(A, \overline{E})$ и $(\overline{C}, C)$, поскольку первая пара соответствует предполагаемому следствию, а вторая – явная коллизия парадокса. Остальные пары необходимо проверить. Например, выполним проверку только двух гипотез $A \to C$ и $A \to \overline{D}$. Проверяем по Теореме 3.

Для гипотезы $A \to C$:

$A^{\nabla} = \{A\}$; $C^{\Delta} = \{C, \overline{A}, \overline{B}, \overline{D}, \overline{E}\}$; $A^{\nabla} \cap C^{\Delta} = \varnothing$; $A^{\nabla} \cap Inv(C^{\Delta}) = \{A\}$ – гипотеза некорректна.

Для гипотезы $A \to \overline{D}$:

$A^{\nabla} = \{A\}$; $\overline{D}^{\Delta} = \{\overline{D}, \overline{E}\}$; $A^{\nabla} \cap \overline{D}^{\Delta} = \varnothing$; $A^{\nabla} \cap Inv(\overline{D}^{\Delta}) = \varnothing$ – то есть, гипотеза корректна.

Проверив остальные гипотезы, убедимся, что возможными вариантами абдуктивного вывода для данной задачи могут быть только следующие базовые суждения:

$A \to \overline{D}$; $B \to \overline{D}$ и $B \to \overline{E}$.

Какой из этих вариантов самый подходящий, можно решить только на основе содержательного анализа. Каждая новая связь влечет за собой некоторую совокупность новых следствий. Какие-то из них могут оказаться несовместимыми с явно не выраженными, но подразумеваемыми правильными суждениями.

10. Метафора и парадокс подмены

Без метафоры трудно представить любое литературное произведение. В науке метафоры тоже играют значительную роль (например, эффект сплетен в химических реакциях, позвоночный столб, черная дыра, солнечная корона, компьютерный вирус, решетки в математике и т. д.). Понятие метафоры было известно еще в древней Греции. Интерес к метафоре становится все более интенсивным и быстро расширяется, захватывая многие области знания: философию, логику, психологию, психоанализ, литературоведение, литературную критику, семиотику, риторику, лингвистическую философию, разные школы лингвистики [13]. В силу этого возросшего интереса появилась даже новая наука, имя которой «метафорология» [14]. Рассмотрим определение метафоры.

Метафора (при формальном подходе к определению, т. е. без учета ее эстетических характеристик) – это слово (в общем случае – выражение), которое намеренно используется в тексте вместо другого (замещаемого) слова (выражения) на основании некоторого неполного совпадения значений этих слов (выражений).

Неполное совпадение значений в определении метафоры существенно, иначе трудно отличить метафору от синонима.

Попытка сформулировать логическую модель метафоры содержится в [14]. Здесь метафора определяется как некоторая логическая аномалия и представляет собой свернутое умозаключение (энтимему), т. е. умозаключение с пропущенной посылкой. В качестве примера используется метафора «Адмиралтейская игла» (в цитируемом тексте «игла Адмиралтейства») из поэмы Пушкина «Медный всадник». Очевидно, что «игла» в данном случае замещает слово «шпиль». В качестве логической модели этой метафоры в [14] предлагается следующее умозаключение.

Меньшая посылка: этот шпиль (S) – очень длинный по отношению к собственному диаметру, прямой, с острым концом (M).

Большая посылка: некоторые объекты, длинные по отношению к собственному диаметру, прямые, с острым концом (M) – иглы (P).

Заключение: Шпиль (S) есть игла (P).

Заметим, что в приведенном тексте логическая аномалия проявляется не только как энтимема, но и как неправильный силлогизм. По правилам силлогистики и формальной логики заключение «Шпиль есть игла» нельзя вывести из данных исходных посылок потому, что вторая посылка – не общее, а частное суждение.

Рассмотрим тот же пример с другой точки зрения. К введенным выше обозначениям S (шпиль), M (длинные, прямые, с острым концом объекты) и P (игла) добавим два признака, которые отличают шпиль и иглу: A – архитектурный элемент и T – орудие труда. Соотношения между этими сущностями формулируются в терминах E-структур в виде следующих посылок:

$S \to M$; $P \to M$; $S \to A$; $P \to T$; $A \to \overline{T}$.

В последней посылке утверждается, что свойства «архитектурный элемент» и «орудие труда» несовместимы. Добавим к этим посылкам их контрапозиции, в результате получим следующий граф (рис. 33).

Введем в схему суждение «Шпиль есть игла» ($S \to P$), отражающее суть данной метафоры, и его контрапозицию. Тогда получим следующий граф (рис. 34).

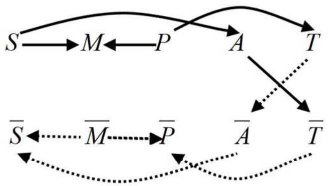


Рис. 33

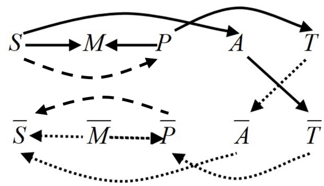


Рис. 34

Из рисунка видно, что наше рассуждение привело к коллизии парадокса ($S \to \overline{S}$). Спрашивается, какую роль играет противоречие в метафоре? Частично ответ на этот вопрос можно найти в книге [15], где обосновывается, что противоречие в метафорах создает напряжение (tension) между терминами, которое и составляет суть метафорического смысла. Очевидно, что это «напряжение» лежит в основе эстетической привлекательности метафоры.

С точки зрения логического анализа подобная ситуация встречается не только в метафорах. Например, в рассуждениях по аналогии разные объекты или сущности отождествляются на основе совпадения некоторых существенных свойств. Затем делается вывод, что другие свойства этих объектов тоже совпадают.

С учетом изложенного имеет смысл обобщить парадокс, возникающий в метафорах, на многочисленные случаи отождествления разных объектов. Назовем его ***парадокс подмены***. Пусть имеется некоторый исходный объект O и его аналог A, при этом множество P_C свойств у этих объектов совпадает. Известно также, что объекту O присущи свойства P_O, а объекту A – свойства P_A, причем данные свойства несовместимы, что можно выразить с помощью формулы $P_A \to \overline{P_O}$. Тогда логическую модель подмены можно представить в виде следующих посылок:

$$A \to P_C;\ O \to P_C;\ A \to P_A;\ O \to P_O;\ P_A \to \overline{P_O}\ ;\ A \to O.$$

В этой E-структуре посылка $A \to O$ выражает процедуру отождествления исходного объекта с аналогом. Нетрудно убедиться, что данное множество посылок инициирует коллизию парадокса $A \to \overline{A}$.

Парадокс подмены не всегда опровергает рассуждения по аналогии. Он появляется лишь в тех случаях, когда обнаруживаются несовместимые свойства отождествляемых сущностей. Но все же следует учесть, что *рассуждения по аналогии часто используются с целью манипуляции сознанием оппонента*.

Заключение

Необходимо отметить, что анализ рассуждений на основе E-структур дает намного более широкие возможности, чем методы, основанные на силлогистике Аристотеля и полисиллогистике. В частности, методы силлогистики не позволяют исследовать возможные гипотезы, проверять правильность рассуждения с помощью анализа коллизий, находить возможные абдуктивные выводы. В то же время в E-структурах имеются четкие алгоритмы для реализации этих видов анализа рассуждений. Такие новые возможности анализа появляются за счет использования в качестве моделей рассуждений сугубо математических структур, таких, как алгебра множеств, теория графов, теория частично упорядоченных множеств. E-структуры представляют собой синтез перечисленных математических систем.

Часть II. Алгебра кортежей и логика

Введение

E-структуры, о которых шла речь в первой части, позволяют моделировать далеко не все виды рассуждений, используемых в современной логике. Например, высказывание «Если *A*, то *C*» можно представить в виде суждения и включить в *E*-структуру. Но для анализа рассуждений с более сложными высказываниями, например, такими, как «Если *A* и *B*, то *C*», *E*-структуры не подходят, и необходимы уже другие математические инструменты. Одна из подходящих для этого универсальных систем – математическая логика, которая включает в себя исчисление высказываний и исчисление предикатов. Но изучать эту систему не просто.

Многие методы логического анализа, предусмотренные в математической логике, предлагается здесь моделировать с помощью более простой для изучения математической системы, которая носит название «алгебра кортежей» (АК). Введение в алгебру кортежей и примеры ее использования для анализа сложных рассуждений рассмотрены в данной части книги.

Исследования показали, что помимо логического анализа алгебру кортежей можно использовать в следующих областях дискретной математики и информационных технологий: 1) реляционные модели; 2) графы и сети; 3) системы искусственного интеллекта (экспертные системы, семантические сети, фреймы, онтологии); 4) логико-вероятностные методы, включая вероятностную логику; 5) дискретные автоматы; 6) задачи удовлетворения ограничений (Constraint Satisfaction Problem – CSP); 7) модели вопросно-ответных систем; 8) при машинной реализации – сокращение трудоемкости алгоритмов решения сложных задач логического анализа за счет специфических свойств АК, а также за счет возможности эффективного распараллеливания алгоритмов.

Об этих и других возможностях АК подробно рассказано в книгах [6, 7].

Математические свойства АК основаны на законах алгебры множеств, а также на свойствах математической структуры, которая называется "декартово произведение множеств" и подробно описана в следующем разделе. При составлении материала предполагалось, что читатель знаком с основами алгебры множеств, изложенных в первой части «Полисиллогистика».

1. Декартово произведение множеств

Объектами алгебры множеств могут стать не только простые элементы, но и разнообразные математические структуры: точки, линии, интервалы, аналитические функции и т. д. Одна из таких структур – последовательность двух, трех и т. д. элементов. Подобные последовательности в математике называют *векторами*, *n-местными последовательностями*, *n-ками*, *кортежами*. Будем называть их ***элементарными кортежами***.

В отличие от множеств, в кортежах порядок элементов неизменен – при любом изменении порядка разных элементов образуется другой кортеж. В то же время сами кортежи при определенных условиях могут быть элементами множеств.

Количество элементов в элементарном кортеже называется ***размерностью*** этого кортежа. Например, кортеж (d, f, w, r) имеет размерность 4. Также принято использовать другую формулировку размерности: можно сказать, что это *4-х местный* кортеж.

Множество элементарных кортежей одной и той же размерности (n) называют ***многоместным*** (или n-местным) ***отношением***. Наглядные примеры многоместных отношений – различные таблицы, содержащие сведения, в частности, о сотрудниках какой-либо фирмы или о состоянии погоды в разных городах. Строки таблицы содержат элементы отношения. К более простым отношениям (бинарным) относятся такие, как "больше", "предшествует", "является потомком" и т. д. Например, отношение "меньше" для множества $\{1, 2, 3\}$ целых чисел можно представить как множество пар чисел $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$, в которых первое число меньше второго, или как таблицу 1.

Таблица 1

1	2
1	3
2	3

Кортежи пригодны для отображения многих предложений естественного языка. Например, элемент (кортеж) отношения ВК (Взятые в библиотеке книги) формулирует математическое представление предложения "Петров взял в библиотеке книгу Шолохова "Тихий Дон". Структура этого отношения выражается в виде заголовка:

ВК (*Фамилия читателя*, *Автор книги*, *Название книги*).

Моделирование и анализ многоместных отношений производится с помощью математической структуры, которая называется «декартово произведение множеств». Дадим определение этой структуры.

Пусть имеется совокупность одинаковых или различных множеств $X, Y, ..., Z$, общее число которых равно n.

Определение 1. ***Декартово произведение*** (ДП) n множеств $X, Y, ..., Z$ есть совокупность всех возможных n-местных элементарных кортежей, где на первом месте стоит элемент множества X, на втором – элемент множества Y, ..., а на последнем – элемент множества Z.

Декартово произведение множеств $X, Y, ..., Z$ обозначается $X \times Y \times ... \times Z$.

Рассмотрим несколько примеров ДП.

1) Для двух множеств $X = \{a, b\}$, $Y = \{c, d\}$

$X \times Y = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$.

Здесь множество $X \times Y$ содержит ***пары*** (т. е. двухместные кортежи) элементов, у которых, в отличие от множеств, порядок строго определен. Чтобы отличить (упорядоченные) пары от множеств, их заключают не в фигурные, а в простые круглые скобки.

2) Исходные множества могут быть непрерывными интервалами, их декартово произведение представляет собой область, ограниченную соответствующим прямоугольником на плоскости. Например, на рис. 1 затемненный прямоугольник вместе со своими границами изображает ДП отрезков AB и CD, находящихся на разных координатных осях. Эти отрезки можно представить как бесконечную совокупность точек, каждая из них имеет координату – действительное число, равное расстоянию от начала координат до этой точки. Значит, элементами ДП будут всевозможные пары чисел, которые обозначают координаты точек, расположенных на плоскости в пределах этого прямоугольника. Ясно, что количество таких пар бесконечно.

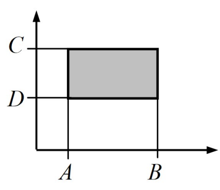


Рис. 1

3) Возможны более сложные структуры, формируемые с помощью ДП (рис. 2 и 3). На рис. 2 структура из 4-х затемненных прямоугольников изображает ДП множеств интервалов $\{AB, CD\} \times \{EF, GH\}$. На рис. 3 совокупность горизонтальных отрезков на координатной плоскости, обозначенных жирными линиями, отображает ДП множества $\{AB, CD\}$ отрезков одной координатной оси на множество $\{F, G, H\}$ точек другой оси. Если в качестве элементов ДП использовать только точки (к примеру, $\{A, B, C\} \times \{G, H\}$), то на плоскости само ДП отобразится как множество точек. Аналогичные структуры можно строить не только на плоскости, но и в трехмерном, четырехмерном и т. д. пространствах.

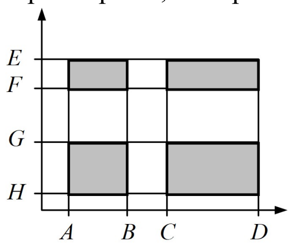


Рис. 2

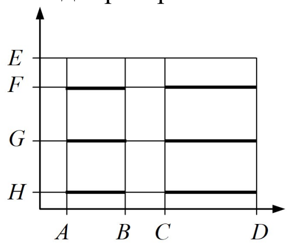


Рис. 3

Последние два примера показывают, что ДП применимо не только к сугубо дискретным системам, но и к системам, содержащим непрерывные точечные множества.

Если ДП формируется из N конечных множеств, то оно содержит конечное число кортежей, и его можно представить в виде таблицы, содержащей N столбцов, а каждая строка этой таблицы будет содержать элементарный кортеж данного ДП.

Декартово произведение n одинаковых множеств S обозначается как S^n. Для совокупности множеств, обозначенных одинаковыми символами с различными индексами (допустим, $S_1, S_2, ..., S_n$), используется символ многократного произведения $\prod$, в этом случае ДП $S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$ обозначается $\prod_{i=1}^{n} S_i$.

В математике с ДП тесно связано определение понятия «отношение». Пусть даны N множеств $X_1, X_2, \ldots, X_N$ и их ДП $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_N$, названное ***универсумом***.

Определение 2. ***N-местным отношением*** называется некоторое выделенное по определенным правилам или по смыслу подмножество элементарных кортежей заданного универсума $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_N$.

Например, отношение «меньше» на множестве чисел $\{1, 2, 3\}$ (табл. 1) с точки зрения Определения 2 есть подмножество элементарных кортежей, выбранных из ДП $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$, которое в данном случае является универсумом.

Приведем некоторые количественные соотношения на ДП. Пусть задано множество X, тогда $|X|$ обозначает количество элементов или ***мощность*** этого множества. Количество всех элементов (т. е. элементарных кортежей) ДП в точности равно произведению мощностей всех используемых в этом произведении множеств, т. е.

$$|X \times Y \times \dots \times Z| = |X| \cdot |Y| \cdot \dots \cdot |Z|. \qquad (2.1)$$

Например, если имеются множества $P = \{a, b, c\}$; $Q = \{a, d, f\}$ и $R = \{a, b, c, f\}$, то их ДП $P \times Q \times R$ будет содержать $3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$ элементарных кортежей.

Чтобы лучше понять суть ДП, рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Три подруги Наташа (Н), Валя (В) и Аня (А) вышли на прогулку, причем туфли и платье каждой были или белого (Б), или синего (С), или зеленого (З) цвета. Требуется определить, сколько возможных вариантов нарядов может быть у трех подруг?

Для ответа рассмотрим множества вариантов задачи. Первое множество – подруги: {Н, В, А}, второе множество – цвет платья: {Б, С, З} и третье множество – цвет туфель: {Б, С, З}. Все возможные варианты нарядов содержатся в ДП этих множеств:

{Н, В, А} × {Б, С, З} × {Б, С, З} = {(Н, Б, Б), (Н, Б, С), ...}

и число всех возможных вариантов будет равно $3 \times 3 \times 3 = 27$.

Свойства декартовых произведений замечательны тем, что позволяют найти соответствия между методами и структурами алгебры множеств и аналитическими средствами математической логики. Свойства ДП подробно изложены в [2, 16]. При определении, обосновании и анализе этих свойств в публикациях других авторов используются общепринятые обозначения, описанные выше. Но далее мы не будем использовать такие обозначения ДП, приведенные во многих других книгах по математике, поскольку для них автором предложена новая система обозначений, с помощью которой намного проще формулируются и обосновываются многие интересные свойства ДП. Эти обозначения также лежат в основе излагаемой далее алгебры кортежей [5 – 7].

2. Основные структуры алгебры кортежей

2.1. *C*-кортежи

Введем некоторые термины и обозначения ***алгебры кортежей*** (АК). В ней используются свойства декартовых произведений и определены четыре типа структур: C-кортеж, C-система, D-кортеж и D-система[1]. Они сформированы по определенным правилам и в сжатой (компактной) форме отображают отношения (т. е. множества элементарных кортежей). В АК они имеют обобщенное название – ***АК-объекты***.

Будем считать, что каждое ДП (например, $A \times B \times C$) есть отношение (см. Определение 2), заданное в определенном универсуме (например, в универсуме $X \times Y \times Z$). Имена множеств, из которых сформирован универсум (в данном случае, X, Y, Z), называются ***атрибутами*** отношения, а множество всех значений атрибута – ***доменом*** этого атрибута. Последовательность имен атрибутов, заключенная в квадратные скобки (в нашем примере она равна $[XYZ]$), задает ***схему отношения***.

Таким образом, каждое рассматриваемое далее ДП будет задано в определенном универсуме и, следовательно, в определенной схеме отношения. При этом каждое множество в заданном ДП (например, B) соответствует определенному атрибуту (в данном примере – Y), и должно соблюдаться правило: каждое множество в заданном ДП отношения есть подмножество домена соответствующего атрибута (в нашем примере $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, $C \subseteq Z$).

Сделаем еще один важный шаг в изменении системы обозначений для ДП, а именно, избавимся от знака $\times$. Вместо традиционной записи ДП типа $R = A \times B \times C$ будем писать

$$R[XYZ] = [A\ B\ C].$$

Расшифровка этой записи следующая: отношение с именем R задано в универсуме $X \times Y \times Z$ и равно ДП $A \times B \times C$.

---

[1] Префиксы "C" и "D" в обозначениях АК-объектов выбраны не случайно. Это сокращенные обозначения логических терминов "конъюнкция" (conjunction) и "дизъюнкция" (disjunction), которые обозначают структуры, соединенные логическими связками "И" (конъюнкция) и "ИЛИ" (дизъюнкция). При сопоставлении со структурами математической логики мы обоснуем, что C-кортежи соответствуют конъюнкции, а D-кортежи – дизъюнкции.

Разумеется, возникает вопрос, с какой целью отменяется общепринятая запись ДП, ведь пока не видно никакого упрощения? Ответ таков: как выяснится далее, все свойства ДП и операции с ними являются операциями и сравнениями с кортежами множеств, из которых формируется само ДП, и, если ДП записывать традиционно, то при выполнении операций и обосновании свойств появляется много лишних, порой мешающих ясному пониманию, обозначений. Кроме того, немалую роль в обосновании многих свойств ДП играет универсум, в котором это ДП задано.

По сути, мы уже определили первый АК-объект.

Определение 3. ***C-кортеж*** есть ограниченный прямыми скобками кортеж множеств, моделирующий отношение, которое равно ДП этих множеств в заданной схеме отношения.

Таким образом, соотношение $R[XYZ] = [A\ B\ C]$ – запись трехместного C-кортежа. Ясно, что C-кортеж обеспечивает *сжатое представление* множества элементарных кортежей.

Определение 4. ***Компонентами*** называются множества, входящие в состав C-кортежа и других АК-объектов и равные некоторым подмножествам доменов соответствующих атрибутов.

Связь между компонентами и атрибутами определяется порядком расположения атрибутов в схеме отношения. Так, компонента B в C-кортеже $R[XYZ] = [A\ B\ C]$ соответствует атрибуту Y.

Приведем примеры.

Пример 2. Допустим, к условиям Примера 1 добавлено ограничение: «Валя не любит белый цвет». Как это ограничение можно выразить с помощью C-кортежа?

Сначала определим универсум

$X \times Y \times Z = \{\text{Н, В, А}\} \times \{\text{Б, С, З}\} \times \{\text{Б, С, З}\}$

В этом универсуме заданное ограничение формулируется как C-кортеж $R[XYZ] = [\{\text{В}\}\ \{\text{С, З}\}\ \{\text{С, З}\}]$.

Пример 3. В универсуме из Примера 2 рассмотрим два элементарных кортежа: (В, С, З) и (В, Б, С) и определим, принадлежат ли они C-кортежу $R[XYZ]$. Первый элементарный кортеж, несомненно, принадлежит, так как каждый его элемент есть элемент соответствующей компоненты C-кортежа. Что касается второго элементарного кортежа, его принадлежность C-кортежу $R[XYZ]$ не подтверждается, поскольку его второй элемент не принадлежит второй компоненте C-кортежа $P[XYZ]$, но в то же время он принадлежит универсуму $X \times Y \times Z$.

В дальнейшем при обосновании свойств C-кортежей часто будет использоваться следующее соотношение:

если в элементарном кортеже T имеется хотя бы один элемент a_i, который не является элементом соответствующей компоненты в C-кортеже R, то $T \notin R$.

Определение 5. ***Однотипными*** называются АК-объекты с одинаковыми схемами отношений.

Опишем свойства C-кортежей и операции с ними. Сначала будем рассматривать операции с однотипными АК-объектами. А позже познакомимся с методами, позволяющими выполнять операции с АК-объектами, у которых разные схемы отношения. Формулируемые ниже свойства и операции для однотипных C-кортежей эквивалентны известным свойствам декартовых произведений, рассмотренным в [2, 16]. Отличие в том, что здесь они выражены в структурах АК, а для дотошных читателей приводятся их доказательства.

Рассмотрим два однотипных C-кортежа: $P = [P_1\ P_2\ \dots\ P_N]$ и $Q = [Q_1\ Q_2\ \dots\ Q_N]$ (в однотипных АК-объектах схему отношения в записи можно не приводить). Ясно, что эти C-кортежи содержат множества элементарных кортежей. Требуется найти признаки, что один C-кортеж является подмножеством другого. Было бы желательно, чтобы для ответа на данный вопрос не потребовалось вычислений ДП C-кортежей, так как во многих случаях для этого требуются значительные (а порой и недостижимые) затраты времени.

Теорема 1 (проверка включения однотипных C-кортежей). Пусть даны два однотипных C-кортежа $P = [P_1\ P_2\ \dots\ P_N]$ и $Q = [Q_1\ Q_2\ \dots\ Q_N]$. Тогда $P \subseteq Q$, если и только если $P_i \subseteq Q_i$ верно для всех соответствующих пар компонент сравниваемых C-кортежей.

Доказательство. Если условие $P_i \subseteq Q_i$ соблюдается для всех пар компонент, то ясно, что любой элементарный кортеж из P содержится и в Q, т. е. $P \subseteq Q$. Предположим, что имеется пара компонент (например, P_i и Q_i), для которых не верно, что $P_i \subseteq Q_i$. Это значит, что в P_i имеется элемент a_i такой, что $a_i \in P_i$ и $a_i \notin Q_i$. Таким образом, в системе имеется элементарный кортеж с a_i, который содержится в P, но не принадлежит Q. Следовательно, при нарушении $P_i \subseteq Q_i$ для всех пар компонент соотношение $P \subseteq Q$ тоже нарушено. *Конец доказательства.*

Рассмотрим пример. Даны C-кортежи

$P = [\{a, d\}\ \{b, c\}\ \{b, f\}]$ и $Q = [\{a, c, d\}\ \{b, c\}\ \{b, c, f\}]$.

Нужно проверить с помощью Теоремы 1, соблюдается ли $P \subseteq Q$.

Нетрудно убедиться, что $\{a, d\} \subseteq \{a, c, d\}$; $\{b, c\} \subseteq \{b, c\}$ и $\{b, f\} \subseteq \{b, c, f\}$. Следовательно, $P \subseteq Q$.

Перейдем к операциям с C-кортежами. Начнем с пересечения.

Теорема 2 (пересечение однотипных C-кортежей). Пусть даны два однотипных C-кортежа $P = [P_1\ P_2\ \dots\ P_N]$ и $Q = [Q_1\ Q_2\ \dots\ Q_N]$. Тогда

$P \cap Q = [P_1 \cap Q_1\ \ P_2 \cap Q_2\ \ \dots\ \ P_N \cap Q_N]$.

Доказательство. Необходимость легко проверяется: если все элементы a_i элементарного кортежа принадлежат пересечениям $P_i \cap Q_i$ соответствующих компонент, то этот кортеж содержится как в P, так и в Q и, следовательно, в $P \cap Q$. Покажем достаточность. Если в элементарном кортеже имеется элемент a_i такой, что $a_i \notin P_i \cap Q_i$, этот элементарный кортеж не может содержаться одновременно в P и Q и, следовательно, не может содержаться в $P \cap Q$. *Конец доказательства.*

Рассмотрим пример. Пусть заданы C-кортежи:

$P = [\{a, c, d\}\ \{b, c\}\ \{b, c, f\}]$ и $Q = [\{a, b, c, d\}\ \{a, c, d\}\ \{b, c, d\}]$.

Используя Теорему 2, вычислим их пересечение. Тогда получим:

$P \cap Q = [\{a, c, d\} \cap \{a, b, c, d\}\ \{b, c\} \cap \{a, c, d\}\ \{b, c, f\} \cap \{b, c, d\}] =$
$= [\{a, c, d\}\ \{c\}\ \{b, c\}]$.

Результат вычисления $P \cap Q$ преобразуется в обычный вид множества элементарных кортежей путем вычисления ДП компонент C-кортежа $[\{a, c, d\}\ \{c\}\ \{b, c\}]$. То же можно получить, выполнив следующие операции:

1) вычислить ДП для C-кортежа P (в соответствии с формулой (2.1) раздела 1 в нем содержится 18 элементарных кортежей);

2) найти ДП для C-кортежа Q (он включает 36 элементарных кортежей);

3) выбрать из этих совокупностей одинаковые элементарные кортежи.

Нетрудно убедиться, что искать результат таким путем намного сложнее, чем с помощью Теоремы 2.

При вычислении $P \cap Q$ возможна ситуация, когда среди пар компонент будут присутствовать пары, пересечение которых равно пустому множеству. Каков тогда будет результат пересечения? Ответ дается в следующей теореме.

Теорема 3 (пустое пересечение однотипных C-кортежей). Пусть даны два однотипных C-кортежа $P = [P_1\ P_2\ \dots\ P_N]$ и $Q = [Q_1\ Q_2\ \dots\ Q_N]$, и в них имеется, по крайней мере, одна пара P_i и Q_i компонент, для которых $P_i \cap Q_i = \varnothing$. Тогда $P \cap Q = \varnothing$.

Доказательство. $P_i \cap Q_i = \varnothing$ означает, что любой элемент a_i в любом элементарном кортеже не содержится одновременно в P_i и Q_i и, следовательно, любой элементарный кортеж не принадлежит P и Q одновременно. Следовательно, $P \cap Q = \varnothing$. *Конец доказательства.*

Рассмотрим пример. Пусть заданы C-кортежи:

$P = [\{a, c, d\}\ \{b, c\}\ \{b, c, f\}]$ и $Q = [\{b, c, d\}\ \{d\}\ \{b, c, d\}]$.

Используя Теорему 2, вычислим их пересечение. Тогда получим:

$P \cap Q = [\{a, c, d\} \cap \{b, c, d\}\ \ \{b, c\} \cap \{d\}\ \ \{b, c, f\} \cap \{b, c, d\}] =$
$= [\{c, d\}\ \varnothing\ \{b, c\}] = \varnothing$.

Перейдем к следующей операции. Рассмотрим, как выполняется операция объединения C-кортежей. Здесь оказывается не так все просто, как при их пересечении. Докажем следующую теорему.

Теорема 4 (объединение однотипных C-кортежей). Пусть даны два однотипных C-кортежа $P = [P_1\ P_2\ \ldots\ P_N]$ и $Q = [Q_1\ Q_2\ \ldots\ Q_N]$. Тогда

$P \cup Q \subseteq [P_1 \cup Q_1\ \ P_2 \cup Q_2\ \ \ldots\ \ P_N \cup Q_N]$.

Доказательство. Пусть $R = [P_1 \cup Q_1\ \ P_2 \cup Q_2\ \ \ldots\ \ P_N \cup Q_N]$. Сначала докажем, что равенство $P \cup Q = R$ не всегда верно. Для доказательства достаточно привести один пример, не подтверждающий это равенство. Пусть $P = [\{d\}\ \{c\}]$ и $Q = [\{a\}\ \{b, c\}]$. Если представить P и Q в виде множеств элементарных кортежей, то получим следующий правильный результат: $P \cup Q = \{(d, c), (a, b), (a, c)\}$.

Если вычислять по формуле

$P \cup Q = [P_1 \cup Q_1\ \ P_2 \cup Q_2\ \ \ldots\ \ P_N \cup Q_N]$, то получим

$P \cup Q = [\{d\} \cup \{a\}\ \ \{c\} \cup \{b, c\}] = [\{d, a\}\ \ \{b, c\}] =$
$= \{(d, b), (d, c), (a, b), (a, c)\}$.

При сравнении результатов вычислений видно, что во втором случае появился лишний элементарный кортеж (d, b). Следовательно, равенство не подтверждается.

Докажем $P \cup Q \subseteq R$. Рассмотрим произвольную пару P_i и Q_i компонент. Для любого элемента p_k, принадлежащего P_i, соблюдается $p_k \in P_i \cup Q_i$. Поскольку это верно для всех пар компонент, то верно и $P \subseteq R$. То же самое можно сказать относительно любого элемента q_k, принадлежащего Q_i: $q_k \in Q_i$ влечет $q_k \in P_i \cup Q_i$. Следовательно, $Q \subseteq R$. Из $P \subseteq R$ и $Q \subseteq R$ следует $P \cup Q \subseteq R$. *Конец доказательства.*

Следует отметить, что случаи, когда

$P \cup Q \neq [P_1 \cup Q_1\ \ P_2 \cup Q_2\ \ \ldots\ \ P_N \cup Q_N]$, значительно преобладают. Но в то же время интересно узнать, в каких случаях соблюдается равенство.

Теорема 5. Для однотипных C-кортежей $P = [P_1\ P_2 \ldots P_N]$ и $Q = [Q_1\ Q_2 \ldots Q_N]$ равенство $P \cup Q = [P_1 \cup Q_1\ \ P_2 \cup Q_2\ \ldots\ P_N \cup Q_N]$ соблюдается в следующих двух случаях:

1) $P \subseteq Q$ или $Q \subseteq P$;

2) для всех пар P_i и Q_i выполняется $P_i = Q_i$, за исключением одной пары.

Доказательство. Случай 1, с учетом Теоремы 1, очевиден, его можно не рассматривать. Рассмотрим случай 2. Не нарушая общности, будем считать «особенной» пару компонент P_1 и Q_1, для которых не имеет места ни $P_1 \subseteq Q_1$, ни в $Q_1 \subseteq P_1$ (иначе это случай 1). Тогда, с учетом равенств $P_i = Q_i$ для остальных пар, требуется доказать равенство $P \cup Q = [P_1 \cup Q_1\ R_2 \ldots R_i \ldots R_N]$, где $R_i = P_i = Q_i$. Поскольку по Теореме 4 соблюдается отношение $P \cup Q \subseteq [P_1 \cup Q_1\ R_2 \ldots R_i \ldots R_N]$, достаточно доказать, что в C-кортеже $[P_1 \cup Q_1\ R_2 \ldots R_i \ldots R_N]$ не существует элементарных кортежей, которые не входили бы в состав $P \cup Q$. Предположим, что такой элементарный кортеж существует. Пусть это будет $T = (t_1, t_2, \ldots, t_{\mathrm{i}}, \ldots, t_{\mathrm{N}})$. Из условия для случая 2 ясно, что как в P, так и в Q существуют элементарные кортежи, у которых последовательности элементов, за исключением первого, совпадают с $(t_2, \ldots, t_i, \ldots, t_N)$. Сомнение вызывает элемент t_1. Известно, что $t_1 \in P_1 \cup Q_1$, т. е. $t_1 \in P_1$ или $t_1 \in Q_1$. Если $t_1 \in P_1$, то $T \in P$, а если $t_1 \in Q_1$, то $T \in Q$. Следовательно, $T \in P \cup Q$. *Конец доказательства*.

Рассмотрим пример. Пусть заданы C-кортежи:

$P = [\{a, c, d\}\ \{b, c\}\ \{b, c, d\}]$ и $Q = [\{a, c, d\}\ \{a, c, d\}\ \{b, c, d\}]$.

Необходимо вычислить их объединение в соответствии с Теоремой 5. Проверим условия. Очевидно, первый случай не подходит, зато условия для второго случая соблюдаются: первые и третьи компоненты у них равны, и только одна (вторая) пара компонент не равны друг другу. Тогда в соответствии с теоремой

$P \cup Q = [\{a, c, d\}\ \{a, b, c, d\}\ \{b, c, d\}]$.

Возникает вопрос, можно ли найти новые случаи, в добавление к тем, которые выражены в Теореме 5, для которых соблюдается равенство

$P \cup Q = [P_1 \cup Q_1\quad P_2 \cup Q_2 \ldots P_N \cup Q_N]$?

Видимо, ответ отрицательный. Чтобы это обосновать, посмотрим, что получится, если немного ослабить условие для случая 2 Теоремы 5. Предположим, что для первой пары, как и в теореме, не соблюдается ни

$P_1 \subseteq Q_1$, ни $Q_1 \subseteq P_1$, но для одной из оставшихся пар (пусть это будет вторая пара) вместо равенства $P_2 = Q_2$ используем строгое включение $P_2 \subset Q_2$. Примером такого послабления является пара C-кортежей

$P = [\{a, c\}\ \{b\}]$ и $Q = [\{b, c\}\ \{a, b\}]$.

Сначала вычислим

$P \cup Q = \{(a, b), (c, b)\} \cup \{(b, a), (b, b), (c, a), (c, b)\} =$
$= \{(a, b), (c, b)\ (b, a), (b, b), (c, a)\}$.

Элементарный кортеж (c, b) содержится как в P, так и в Q, поэтому в $P \cup Q$ содержится не 6, а 5 элементарных кортежей. Вычислим теперь

$[P_1 \cup Q_1\ P_2 \cup Q_2] = [\{a, b, c\}\ \{a, b\}] =$
$= \{(a, a), (a, b), (c, b)\ (b, a), (b, b), (c, a)\}$.

Нетрудно видеть, что во втором вычислении появился лишний элементарный кортеж (a, a), что говорит о том, что послабление не дало ожидаемого результата. Расчет подтверждает предположение о невозможности найти новые условия для равенства

$P \cup Q = [P_1 \cup Q_1\ \ P_2 \cup Q_2\ \dots\ P_N \cup Q_N]$.

В данном разделе с помощью C-кортежей описаны почти все известные свойства ДП. Еще одно известное свойство ДП рассмотрено в разделе 2.4 (Теорема 9). В следующих разделах излагаются новые свойства, для описания которых потребовалось введение других типов АК-объектов.

2.2. *C*-системы и операции с ними

Как мы уже убедились, объединение некоторых однотипных C-кортежей не всегда удается отобразить с помощью единственного C-кортежа. Поэтому целесообразно ввести новую структуру, которая представляет объединение C-кортежей.

Определение 6. ***C*-системой** называется АК-объект, который равен объединению произвольного числа однотипных C-кортежей. Эти C-кортежи записываются друг под другом, и полученная структура ограничивается прямыми скобками.

По сути, C-система есть объединение множеств элементарных кортежей, содержащихся во включенных в нее C-кортежах.

Например, результатом объединения однотипных C-кортежей $P = [P_1\ P_2 \dots P_N]$ и $Q = [Q_1\ Q_2 \dots Q_N]$ будет C-система

$$P \cup Q = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_N \\ Q_1 & Q_2 & \dots & Q_N \end{bmatrix}.$$

C-системы по виду напоминают матрицы, но операции с C-системами существенно отличаются от операций с матрицами. Каждый столбец в C-системе соответствует одному определенному атрибуту, а каждая строка – включенному в нее C-кортежу. C-системы могут состоять из произвольного множества строк. Ясно, что перестановка строк не изменяет содержания C-системы.

Рассмотрим C-систему

$$R[XYZ] = \begin{bmatrix} \{a,d\} & \{f,g,h\} & \{b,c\} \\ \{b,d\} & \{f,h\} & \{a,c\} \\ \{b,c\} & \{g\} & \{b\} \end{bmatrix}.$$

Отношение R возможно преобразовать в эквивалентное множество элементарных кортежей, если последовательно "разворачивать" каждый из C-кортежей, содержащихся в C-системе, во множество элементарных кортежей. При этом надо учитывать, что некоторые элементарные кортежи могут содержаться в разных C-кортежах, и повторяющиеся элементарные кортежи надо удалять, оставляя только один из них. В C-системе R таковы первый и второй C-кортежи, так как результат их пересечения (см. Теорему 2) не пуст – это C-кортеж $[\{d\}\ \{f, h\}\ \{c\}]$. Значит, элементарные кортежи (d, f, c) и (d, h, c) содержатся в каждом из этих C-кортежей.

Теперь можно перейти к следующим операциям, а именно к операциям объединения и пересечения C-систем.

Теорема 6 (объединение C-систем). Объединение однотипных C-систем есть C-система, в которую включены все C-кортежи объединяемых C-систем.

Теорема непосредственно следует из Определения 6.

Теорема *7* (пересечение C-кортежа и C-системы). Пусть даны однотипные C-кортеж P и C-система Q. Результатом их пересечения будет C-система, содержащая все непустые пересечения C-кортежа P с каждым C-кортежем из Q.

Доказательство. Поскольку C-кортеж P и все C-кортежи Q_i C-системы Q являются множествами, то пересечение $P \cap Q$ можно выполнить, используя закон дистрибутивности пересечения. Если при пересечениях $P \cap Q_i$ получаются пустые C-кортежи, то в объединении множеств их можно не учитывать. *Конец доказательства.*

Пример 4. Пусть в схеме отношения $[XYZ]$ заданы C-кортеж

$$P = [\{b, c\}\ \{f, g\}\ \{a, c\}] \text{ и } C\text{-система } Q = \begin{bmatrix} \{a,d\} & \{f,g\} & \{b,c\} \\ \{b,d\} & \{f\} & \{a,c\} \\ \{b,c\} & \{g\} & \{b\} \end{bmatrix}.$$

Требуется вычислить $P \cap Q$.

Выполним вычисления в соответствии с Теоремой 7.

$[\{b, c\}\ \{f, g\}\ \{a, c\}] \cap [\{a, d\}\ \{f, g\}\ \{b, c\}] = \varnothing$;

$[\{b, c\}\ \{f, g\}\ \{a, c\}] \cap [\{b, d\}\ \{f\}\ \{a, c\}] = [\{b\}\ \{f\}\ \{a, c\}]$;

$[\{b, c\}\ \{f, g\}\ \{a, c\}] \cap [\{b, c\}\ \{g\}\ \{b\}] = \varnothing$.

В результате пересечений непустым оказался один C-кортеж. В итоге получим

$P \cap Q = [\{b\}\ \{f\}\ \{a, c\}]$.

Теорема 8 (пересечение двух C-систем). Пусть даны однотипные C-системы P и Q. Результатом их пересечения будет C-система, содержащая все непустые пересечения каждого C-кортежа из P с каждым C-кортежем из Q.

Доказательство. Здесь, как и в Теореме 7, применяется закон дистрибутивности, но в более сложном формате. *Конец доказательства.*

Пример 5. Пусть заданы две C-системы

$$P = \begin{bmatrix} \{a,b,d\} & \{f\} & \{b\} \\ \{b,c\} & \{f,g\} & \{a,c\} \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} \{a,d\} & \{f,g\} & \{b,c\} \\ \{b,d\} & \{f\} & \{a,c\} \\ \{b,c\} & \{g\} & \{b\} \end{bmatrix}.$$

Необходимо вычислить их пересечение, что выполняется в следующем порядке:

1) находим пересечение всех пар C-кортежей, содержащихся в разных C-системах:

$[\{a, b, d\}\ \{f\}\ b\}] \cap [\{a, d\}\ \{f, g\}\ \{b, c\}] = [\{a, d\}\ \{f\}\ \{b\}]$;

$[\{a, b, d\}\ \{f\}\ \{b\}] \cap [\{b, d\}\ \{f\}\ \{a, c\}] = \varnothing$;

$[\{a, b, d\}\ \{f\}\ \{b\}] \cap [\{b, c\}\ \{g\}\ \{b\}] = \varnothing$;

$[\{b, c\}\ \{f, g\}\ \{a, c\}] \cap [\{a, d\}\ \{f, g\}\ \{b, c\}] = \varnothing$;

$[\{b, c\}\ \{f, g\}\ \{a, c\}] \cap [\{b, d\}\ \{f\}\ \{a, c\}] = [\{b\}\ \{f\}\ \{a, c\}]$;

$[\{b, c\}\ \{f, g\}\ \{a, c\}] \cap [\{b, c\}\ \{g\}\ \{b\}] = \varnothing$.

2) из оставшихся непустых C-кортежей формируем C-систему:

$$P \cap Q = \begin{bmatrix} \{a,d\} & \{f\} & \{b\} \\ \{b\} & \{f\} & \{a,c\} \end{bmatrix}.$$

2.3. Фиктивные компоненты

Для того, чтобы двигаться дальше (в частности, определить операцию дополнения), требуется ввести некоторые новые термины, а именно *фиктивные компоненты*. Слово «фиктивные» в математической теории отношений применяется к атрибутам, которые могут добавляться в отношение и при этом содержат полный набор всех своих значений для каждого элемента отношения, т. е., по сути, не приводят при своем добавлении к каким-либо ограничениям. Для чего это нужно, станет известно позже, но в АК «фиктивные» свойства относятся не только к атрибутам, но и к компонентам.

Определение 7. ***Фиктивными компонентами*** в АК называются два типа компонент: 1) ***полная компонента*** ($*$), равная домену соответствующего атрибута, и 2) ***пустая компонента*** ($\varnothing$).

Для лучшего понимания данного определения рассмотрим пример. Пусть задана C-система $R[XYZ] = \begin{bmatrix} A & * & C \\ D & E & * \end{bmatrix}$. Значение двух полных фиктивных компонент в ней определяется их местоположением. Фиктивная компонента в первой строке находится во втором столбце и, соответственно, равна домену атрибута Y, а компонента $*$ во второй строке находится в третьем столбце и, значит, равна домену атрибута Z. Если нужно выразить C-систему $R[XYZ]$ в виде множества элементарных кортежей, то требуется вычислять это отношение по формуле

$R[XYZ] = (A \times Y \times C) \cup (D \times E \times Z)$.

Здесь вместо фиктивных компонент вставлены соответствующие атрибуты.

Из предыдущего ясно, что операции алгебры множеств с АК-объектами состоят из операций с отдельными компонентами, причем только с теми, которые относятся к одному и тому же атрибуту. Поэтому при необходимости выполнения операций с компонентами, среди которых имеется полная компонента ($*$) и какая-либо компонента A, можно не выяснять, какому атрибуту соответствует полная компонента. В таких случаях действуют следующие правила:

(i) $A \cap * = A$; $A \cup * = *$ и

(ii) $\overline{*} = \varnothing$; $\overline{\varnothing} = *$.

Пустая компонента соответствует пустому множеству. Ее присутствие в C-кортеже (см. Теорему 3) означает, что он равен пустому множеству. Но пустая компонента имеет важное смысловое значение в структурах, которые будут определены далее.

2.4. *D*-кортежи и *D*-системы

Таким образом, мы убедились, что для отношений, заданных в виде *C*-кортежей или *C*-систем, выполнимы две операции алгебры множеств – пересечение и объединение. Чтобы обеспечить полное соответствие АК и алгебры множеств, необходимо рассмотреть еще одну операцию – дополнение.

Дополнением многоместного отношения R называется множество всех содержащихся в универсуме элементарных кортежей, которые останутся, если из универсума изъять все элементарные кортежи, принадлежащие R. Значит, дополнение некоторого *C*-кортежа R можно вычислить с помощью следующего алгоритма.

Плохой (т. е. неоправданно трудоемкий) алгоритм вычисления дополнения С-кортежа:

1) «Развернуть» (т. е. разложить на элементарные кортежи) *C*-кортеж R и соответствующий ему универсум $\boldsymbol{U}$;

2) Из «развернутого» $\boldsymbol{U}$ исключить все элементарные кортежи, содержащиеся в R. Оставшиеся элементарные кортежи будут представлять дополнение R (т. е. $\overline{R}$).

Ясно, что такая операция весьма трудоемка, а во многих случаях, когда требуется работать с бесконечными множествами, вообще невыполнима. Задача существенно упрощается при использовании соотношений АК, о которых речь пойдет далее.

Определим сначала *дополнение компоненты С-кортежа*. Если многоместное отношение задано в пространстве, и каждый атрибут последнего представлен некоторым множеством, то универсумом каждой компоненты *C*-кортежа будет домен соответствующего ей атрибута, а дополнением – множество, содержащее все элементы этого домена, не принадлежащие данной компоненте. Например, пусть в пространстве $\boldsymbol{U} = X \times Y \times Z$ задан *C*-кортеж $R = [R_1\ R_2\ R_3]$. Тогда соответственно

$$\overline{R_1} = X \setminus R_1;\ \overline{R_2} = Y \setminus R_2;\ \overline{R_3} = Z \setminus R_3,$$

где знаком «\» обозначена операция ***разности*** множеств.

Рассмотрим еще одну очень важную структуру.

Определение 8. ***Диагональной С-системой*** называется *C*-система с одинаковым числом строк и столбцов, диагональ которой содержит не-фиктивные компоненты, а все остальные компоненты есть фиктивные полные компоненты ($*$).

Пример диагональной C-системы размерности 3×3:

$$R[XYZ] = \begin{bmatrix} A & * & * \\ * & B & * \\ * & * & C \end{bmatrix}.$$

Заметим, что расположение нефиктивных компонент строго по диагонали в диагональных C-системах необязательно. Важно, чтобы каждый столбец и каждая строка содержали только одну нефиктивную компоненту. Таким образом,

$$R[XYZ]=\begin{bmatrix} A & * & * \\ * & B & * \\ * & * & C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} * & B & * \\ A & * & * \\ * & * & C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} * & * & C \\ * & B & * \\ A & * & * \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} * & * & C \\ A & * & * \\ * & B & * \end{bmatrix}=\ldots$$

Доказательство равенства этих C-систем исходной C-системе $R[XYZ]$ основано на том, что все они образованы с помощью перестановки строк исходной C-системы $R[XYZ]$.

Теорема 9. Дополнение C-кортежа $P = [P_1\ P_2\ \ldots\ P_{n\text{-}1}\ P_n]$ есть диагональная C-система $R = \begin{bmatrix} \overline{P_1} & * & \ldots & * \\ * & \overline{P_2} & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ * & * & \ldots & \overline{P_n} \end{bmatrix}$ размерности $n \times n$, где каждая диагональная компонента – дополнение соответствующей компоненты C-кортежа P.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{U} = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ – универсум, в котором заданы C-кортеж P и C-система R. Для доказательства теоремы достаточно проверить, что

(i) $R \cap P = \varnothing$ и (ii) $R \cup P = \boldsymbol{U}$.

Докажем (i). Пусть R_i – C-кортеж с номером i в диагональной C-системе R. В каждом R_i диагональная компонента с номером i представляет собой дополнение компоненты с тем же номером в P. Следовательно, пересечение любого C-кортежа из R с C-кортежем P есть пустое множество. Значит, $R \cap P = \varnothing$.

Докажем (ii). Для этого достаточно доказать, что любой элементарный кортеж $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из $\boldsymbol{U}$, если он не принадлежит P, обязательно принадлежит R. Ясно, что в P не входят все те элементарные кортежи из

$\boldsymbol{U}$, у которых, по крайней мере, один элемент не содержится в соответствующей компоненте C-кортежа P. Допустим, что это элемент a_i. Следовательно, $a_i \in \overline{P_i}$. Тогда этот элементарный кортеж принадлежит C-кортежу $R_i = [* \ldots * \ \overline{P_i} \ * \ldots *]$, который содержится в C-системе R. Отсюда следует, что любой элементарный кортеж из $\boldsymbol{U}$, не содержащийся в C-кортеже P, принадлежит R. *Конец доказательства*.

Пример 6. Пусть в пространстве

$\boldsymbol{U} = X \times Y \times Z = \{a, b, c, d\} \times \{f, g, h\} \times \{a, b, c\}$

задан C-кортеж $T = [\{b, d\} \ \{f, h\} \ \{a, b\}]$. Его дополнением в соответствии с Теоремой 9 будет C-система

$$\overline{T} = \begin{bmatrix} X \setminus \{b,d\} & * & * \\ * & Y \setminus \{f,h\} & * \\ * & * & Z \setminus \{a,b\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{a,c\} & * & * \\ * & \{g\} & * \\ * & * & \{c\} \end{bmatrix}.$$

Если в исходном C-кортеже содержатся полные компоненты, то его дополнение будет содержать C-кортежи с пустыми компонентами, которые можно удалить. Например, если в том же пространстве $\boldsymbol{U}$ задан C-кортеж $T_1 = [\{a, c\} * \{b, c\}]$, то, вычислив его дополнение согласно Теореме 9, мы убедимся, что дополняющая его C-система содержит два C-кортежа:

$$\overline{T_1} = \begin{bmatrix} \{b,d\} & * & * \\ * & \varnothing & * \\ * & * & \{a\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{b,d\} & * & * \\ * & * & \{a\} \end{bmatrix},$$

поскольку второй C-кортеж в $\overline{T_1}$ пустой, и в объединении его можно не учитывать.

Перейдем к определению D-кортежей и D-систем. Рассмотрим диагональную C-систему. Очевидно, информация о ней содержится только в диагональных компонентах, а все остальные компоненты избыточны, хотя их может быть немало. Например, диагональная C-система размерности 5 × 5 содержит 25 компонент, и из них полных компонент – 20. С учетом этого запись диагональной C-системы можно существенно сократить, если записать только кортеж диагональных компонент. А чтобы не путать этот кортеж с C-кортежем, ограничим его другими скобками. Тогда получится еще один тип АК-объекта.

Определение 9. ***D-кортеж*** – это кортеж диагональных компонент диагональной C-системы, ограниченный парой (], [) перевернутых прямых скобок.

В соответствии с Теоремой 9 и Определением 9 дополнение любого C-кортежа есть D-кортеж, каждая компонента которого равна дополнению соответствующей компоненты исходного C-кортежа.

Например, дополнение C-кортежа $P = [P_1\ P_2\ ...\ P_{n\text{-}1}\ P_n]$ из Теоремы 9 равно D-кортежу $]\overline{P_1}\ \ \overline{P_2}\ \ ...\ \ \overline{P_{n-1}}\ \ \overline{P_n}\,[$, дополнение C-кортежа $T = [\{b, d\}\ \{f, h\}\ \{a, b\}]$ из примера 6 – D-кортежу $]\{a, c\}\ \{g\}\ \{c\}[$. Для записи дополнения C-кортежа, содержащего фиктивные компоненты, используются D-кортежи, у которых на месте соответствующих фиктивных компонент исходного C-кортежа расположены фиктивные компоненты "$\varnothing$". Например, дополнение C-кортежа $[\{a, d\} * \{b\}]$ равно D-кортежу $]\{b, c\}\ \varnothing\ \{a, c\}[$.

Ясно, что пустая компонента в D-кортежах отнюдь не означает, что данный D-кортеж пуст. Ее присутствие говорит о том, что при вычислении дополнения такого D-кортежа будет получен C-кортеж, у которого на месте пустой компоненты появится полная компонента. С учетом сказанного справедлива следующая теорема.

Теорема 10. Дополнение C-кортежа $P = [P_1\ P_2\ ...\ P_n]$ равно D-кортежу $]\overline{P_1}\ \ \overline{P_2}\ \ ...\ \ \overline{P_n}\,[$, а дополнение D-кортежа $Q =]Q_1\ Q_2\ ...\ Q_n[$ есть C-кортеж $[\overline{Q_1}\ \ \overline{Q_2}\ \ ...\ \ \overline{Q_n}\,]$.

Можно предположить, что после D-кортежа, по аналогии с C-системами, очередным и последним типом АК-объекта должна быть структура, содержащая множество D-кортежей. Вопрос заключается в том, как интерпретировать эту структуру, чтобы понять, с помощью какого алгоритма ее можно преобразовать во множество элементарных кортежей. Рассмотрим пример.

***Пример** 7*. В пространстве

$\boldsymbol{U} = X \times Y \times Z = \{a, b, c, d\} \times \{f, g, h\} \times \{a, b, c\}$

задана C-система $R = \begin{bmatrix} \{b,d\} & \{g\} & * \\ * & \{f,h\} & \{a,c\} \end{bmatrix}$. Требуется вычислить ее дополнение.

Для решения задачи используем один из законов де Моргана, который для общего случая формулируется так. Пусть задано объединение множеств $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Тогда

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}\ .$$

C-система является объединением *C*-кортежей. Поэтому по закону де Моргана ее дополнением будет пересечение дополнений содержащихся в ней *C*-кортежей. Дополнения *C*-кортежей можно вычислить по Теореме 10 и получить соответствующие *D*-кортежи. Тогда найдем:

$$\overline{R} =]\{a, c\}\ \{f, h\}\ \varnothing[\ \cap\ ]\varnothing\ \{g\}\ \{b\}[.$$

Но пересечение однотипных *D*-кортежей, как и объединение однотипных *C*-кортежей, можно записать в виде матрицы, воспользовавшись для этого другими ограничивающими скобками:

$$\overline{R} = \left]\begin{matrix} \{a,c\} & \{f,h\} & \varnothing \\ \varnothing & \{g\} & \{b\} \end{matrix}\right[.$$

Таким образом, мы пришли к определению четвертого типа АК-объекта.

Определение 10. ***D-система*** – это структура, которая записывается как матрица, ограниченная парой (], [) перевернутых прямых скобок, причем строки матрицы представлены однотипными *D*-кортежами, а вся структура моделирует отношение, равное пересечению этих *D*-кортежей.

Теперь у нас достаточно сведений, чтобы определить алгоритмы вычисления дополнений для *C*-систем и *D*-систем.

Теорема 11. Дополнение *C*-системы есть *D*-система той же размерности, все компоненты которой равны дополнениям соответствующих компонент исходной *C*-системы.

Теорема 12. Дополнением *D*-системы есть *C*-система той же размерности, все компоненты которой равны дополнениям соответствующих компонент исходной *D*-системы.

Для обоснования Теоремы 11 используется один из законов де Моргана (см. пример 7). Для обоснования Теоремы 12 применяется второй закон де Моргана:

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \ldots \cup \overline{A_n}\ .$$

Иногда требуется преобразовать *D*-систему во множество элементарных кортежей. Как эта задача решается для *C*-систем, нам известно (раздел 2.2), поэтому приведем алгоритм, позволяющий преобразовать *D*-системы в *C*-систему.

Алгоритм 1 (преобразование *D*-системы в *C*-систему):

1) используя Определение 8, преобразовать каждый *D*-кортеж исходной *D*-системы в диагональную *C*-систему;

2) по Теореме 8, последовательно вычислить пересечение C-систем, полученных на шаге 1.

Алгоритм преобразования D-систем в C-системы, несмотря на простоту формулировки, во многих случая оказывается весьма трудоемким. Для систем большой размерности он может стать практически нереализуемым. Поэтому его целесообразно использовать по возможности реже. Однако в АК разработаны методы и приемы, позволяющие при операциях с АК-объектами либо избежать применения этого алгоритма (т. е. работать непосредственно с D-системами), либо применять методы, позволяющие во многих частных случаях значительно уменьшить нужные для его выполнения вычислительные ресурсы [6, 7]. Некоторые из этих методов приведены в разделе 5.2.1 (Пример 10).

Пример 8. Преобразовать D-систему $\overline{R} = \left]\begin{matrix} \{a,c\} & \{f,h\} & \varnothing \\ \varnothing & \{g\} & \{b\} \end{matrix}\right[$ в C-систему.

Сначала преобразуем каждый D-кортеж из $\overline{R}$ в диагональную C-систему:

$$]\{a, c\}\ \{f, h\}\ \varnothing[\ = \begin{bmatrix} \{a,c\} & * & * \\ * & \{f,h\} & * \\ * & * & \varnothing \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{a,c\} & * & * \\ * & \{f,h\} & * \end{bmatrix};$$

$$]\varnothing\ \{g\}\ \{b\}[\ = \begin{bmatrix} \varnothing & * & * \\ * & \{g\} & * \\ * & * & \{b\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & \{g\} & * \\ * & * & \{b\} \end{bmatrix}.$$

Вычислим по Теореме 8 пересечение этих C-систем:

$$\begin{bmatrix} \{a,c\} & * & * \\ * & \{f,h\} & * \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} * & \{g\} & * \\ * & * & \{b\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{a,c\} & \{g\} & * \\ \{a,c\} & * & \{b\} \\ * & \{f,h\} & \{b\} \end{bmatrix}.$$

В итоге получилась C-система с тремя C-кортежами, так как пересечение C-кортежей $[*\ \{f, h\}\ *]$ и $[*\ \{g\}\ *]$ – пустое множество.

Представляет интерес частный случай, когда C-кортеж содержит фиктивные компоненты, за исключением одной, например, $[*\ *\ A\ *]$. В таких случаях дополнением C-кортежа будет не только D-кортеж $]\varnothing\ \varnothing\ \overline{A}\ \varnothing[$, но и C-кортеж $[*\ *\ \overline{A}\ *]$.

Теорема 13. Дополнение C-кортежа $P = [* * \ldots P_i \ldots *]$ с единственной (i-ой) нефиктивной компонентой равно C-кортежу

$P_C = [* * \ldots \overline{P_i} \ldots *]$.

Доказательство. Требуется показать, что (i) $P \cap P_C = \varnothing$ и (ii) $P \cup P_C = \boldsymbol{U}$. Равенство (i) верно в силу Теоремы 3, так как $P_i \cap \overline{P_i} = \varnothing$. Рассмотрим объединение C-кортежей P и P_C. Их структура соответствует условию 2 Теоремы 5. Следовательно, $P \cup P_C = [* * \ldots P_i \cup \overline{P_i} \ldots *]$. Поскольку $P_i \cup \overline{P_i} = *$, то $P \cup P_C$ есть C-кортеж со всеми полными компонентами, т. е. он равен универсуму. *Конец доказательства*.

Теорема 13 показывает, в частности, что одноместные АК-объекты при добавлении фиктивных атрибутов могут быть как C-кортежами, так и D-кортежами.

Для полноты картины было бы желательно знать некоторые другие, не рассмотренные здесь, операции и соотношения для АК-объектов. Они приведены далее в тексте и в Приложении 1 в виде теорем с номерами 14 – 36. Доказательства этих теорем здесь не даны – их можно найти в литературе по АК [6, 7].

2.5. Пустые и универсальные АК-объекты

Для решения многих задач, в том числе задач логического вывода (см. раздел 5), нередко необходимо определить, пуст ли данный АК-объект, или, наоборот, не содержит ли он все элементарные кортежи универсума. Оказывается, распознавание таких АК-объектов далеко не всегда бывает простым.

Начнем с C-систем. Определить, что она равна пустому множеству, весьма просто – в такой системе все C-кортежи должны быть пустыми, что легко проверяется с помощью Теоремы 3.

В то же время проверка равенства некоторых C-систем универсуму может оказаться весьма трудоемкой. В качестве примера рассмотрим следующую C-систему в универсуме

$\boldsymbol{U} = X \times Y \times Z = \{a, b, c\} \times \{f, g, h\} \times \{a, b, c\}$:

$$P[XYZ] = \begin{bmatrix} \{a,c\} & \{g\} & \{b,c\} \\ \{b\} & * & * \\ \{a,c\} & \{f,h\} & * \\ \{a,c\} & \{g\} & \{a\} \end{bmatrix}.$$

Можно доказать (это доказательство будет приведено ниже), что $P[XYZ] = \boldsymbol{U}$, т. е. в этой C-системе содержатся все 27 элементарных кортежей универсума.

Для D-систем все наоборот. Легко определяется равенство D-системы универсуму, для этого нужно, чтобы все ее D-кортежи были бы равны универсуму. А D-кортеж равен универсуму, если хотя бы одна его компонента равна полной фиктивной компоненте. А вот определить, что некоторая D-система равна пустому множеству, порой довольно трудно. Пример пустой D-системы в том же универсуме:

$$Q[XYZ] = \left]\begin{matrix} \{b\} & \{f,h\} & \{a\} \\ \{a,c\} & \varnothing & \varnothing \\ \{b\} & \{g\} & \varnothing \\ \{b\} & \{f,h\} & \{b,c\} \end{matrix}\right[.$$

Один из способов проверки пустоты D-системы в АК – ее преобразование в С-систему (см. Алгоритм 1 в предыдущем разделе)**.**

Для этого надо преобразовать каждый ее D-кортеж в C-систему и вычислить пересечение полученных C-систем. Если полученная C-система окажется пустой, то и исходная D-система тоже пуста. Посмотрим, что получится при преобразовании $Q[XYZ]$ в C-систему. Сначала преобразуем все D-кортежи в диагональные C-системы:

$$\{b\}\ \ \{f, h\}\ \ \{a\}[= \begin{bmatrix} \{b\} & * & * \\ * & \{f,h\} & * \\ * & * & \{a\} \end{bmatrix};$$

$$]\{a, c\}\ \ \varnothing\ \ \varnothing\,[= [\{a, c\}\ \ *\ \ *];$$

$$]\{b\}\ \ \{g\}\ \ \varnothing\,[= \begin{bmatrix} \{b\} & * & * \\ * & \{g\} & * \end{bmatrix};$$

$$]\{b\}\ \ \{f, h\}\ \ \{b, c\}[= \begin{bmatrix} \{b\} & * & * \\ * & \{f,h\} & * \\ * & * & \{b,c\} \end{bmatrix}.$$

Затем последовательно вычислим пересечение полученных C-систем (Теорема 8):

$$\begin{bmatrix} \{b\} & * & * \\ * & \{f,h\} & * \\ * & * & \{a\} \end{bmatrix} \cap [\{a, c\}\ \ *\ \ *] = \begin{bmatrix} \{a,c\} & \{f,h\} & * \\ \{a,c\} & * & \{a\} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \{a,c\} & \{f,h\} & * \\ \{a,c\} & * & \{a\} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} \{b\} & * & * \\ * & \{g\} & * \end{bmatrix} = [\{a,c\} \ \ \{g\} \ \ \{a\}];$$

$$[\{a,c\} \ \ \{g\} \ \ \{a\}] \cap \begin{bmatrix} \{b\} & * & * \\ * & \{f,h\} & * \\ * & * & \{b,c\} \end{bmatrix} = \varnothing.$$

Следовательно, $Q[XYZ] = \varnothing$. Что касается C-системы $P[XYZ]$, то для доказательства ее равенства универсуму достаточно убедиться, она дополняет D-систему $Q[XYZ]$ (см. Теорему 11). А поскольку $Q[XYZ]$ пуста, то ясно, что $P[XYZ] = \boldsymbol{U}$.

Алгоритм преобразования D-системы в C-систему весьма трудоемок, при больших размерностях D-системы (например, 40 атрибутов и 60 D-кортежей в одной D-системе) он может оказаться не реализуемым за приемлемое время даже на современных вычислительных устройствах. Разработаны методы уменьшения трудоемкости этого алгоритма, которые во многих случаях помогают существенно сократить объем вычислений [6, 7].

С учетом сказанного, в приложениях АК для проверки универсальности C-системы вычисляется ее дополнение (Теорема 11) и проверяется пустота полученной D-системы с помощью алгоритма преобразования ее в C-систему.

3. Использование алгебры кортежей при решении логических задач

При решении рассмотренных здесь задач используются следующие особенности. Первая заключается в том, что высказывания в условиях задачи можно легко записать в структурах АК. Вторая особенность позволяет получить истинное высказывание, вычислив дополнение ложного высказывания. Однако при этом надо учитывать, что АК-объекту соответствует истинное утверждение, если он содержит хотя бы один истинный элементарный кортеж, и ложное утверждение, если все элементарные кортежи в данном АК-объекте ложные. Поэтому дополнение истинного АК-объекта не обязательно ложно: в универсуме могут оказаться другие истинные элементарные кортежи. В то же время дополнение ложного АК-объекта истинно, но при условии, что задача непротиворечива, т. е. содержит истинные элементарные кортежи.

Задача 1. В бутылке, кувшине, стакане и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в бутылке, сосуд с лимонадом находится между кувшином и сосудом с квасом, в банке не лимонад и не вода. Стакан находится около банки и сосуда с молоком. Как распределены эти жидкости по сосудам?

Сначала введем сокращения: бутылка – Бу, кувшин – К, стакан – С, банка – Ба, молоко – М, лимонад – Л, квас – Кв, вода – В. Универсум задачи состоит из двух атрибутов: Жидкости и Сосуды и равен {М, Л, Кв, В} × {Бу, К, С, Ба}. Ограничения, сформулированные в задаче, можно выразить как *С*-кортежи.

1) «Молоко и вода не в бутылке»: P_1 = [{М, В} {К, С, Ба}].

2) «Сосуд с лимонадом находится между кувшином и сосудом с квасом» означает, что лимонад и квас не в кувшине:

P_2 = [{Л, Кв} {Бу, С, Ба}].

3) «В банке не лимонад и не вода»: P_3 = [{М, Кв} {Ба}].

4) «Стакан находится около банки и сосуда с молоком» означает, что молоко не в банке и не в стакане: P_4 = [{М} {Бу, К}].

Исходим из того, что все высказывания истинные. Это означает, что в каждом *С*-кортеже имеется хотя бы один истинный элементарный кортеж. Рассмотрим P_3 и P_4. P_3 означает, что молоко может быть в банке, в то время как из P_4 следует, что молоко в другом сосуде (в кувшине или в бутылке). Противоречие можно решить, если предположить, что в банке не молоко, а квас, тем самым определена первая пара (Кв, Ба). Молоко встречается в P_1 и в P_4. Вычислим их пересечение:

$P_1 \cap P_4$ = [{М} {К}] – из этой операции определилась вторая пара (М, К).

Теперь из P_1 можно исключить уже определенные М из Жидкостей и К и Ба из Сосудов. Тогда останется *С*-кортеж [{В} {С}] и соответственно пара (В, С). Для четвертой пары остается единственный вариант (Л, Бу).

Ответ: (Кв, Ба), (М, К), (В, С), (Л, Бу).

Задача 2. Поиск клада. Перед нами три пещеры, в одной из них находится клад (*К*), в другой – полно змей (*З*), третья – пустая (*П*). Нужно определить, в какой пещере находится клад, если в качестве ориентировки заданы два высказывания, причем одно из них истинное, а другое – ложное, но какое именно, нам неизвестно.

Первое: «Во 2-й пещере нет змей, а 3-я пещера не пуста».

Второе: «1-я пещера не пуста, а во 2-й нет змей».

Для решения задачи выразим условия в виде C-кортежей. Универсум равен ДП $\{К, З, П\} \times \{К, З, П\} \times \{К, З, П\}$.

Первое высказывание: $[* \; \{П, К\} \; \{К, З\}]$.

Второе высказывание: $[\{К, З\} \; \{П, К\} \; *]$.

Сначала предположим, что первое высказывание истинно, а второе – ложно. Поскольку второе высказывание ложное, то истинным будет высказывание, равное дополнению C-кортежа, выражающего это высказывание. Вычислив это дополнение, получим D-кортеж $]\{П\} \; \{З\} \; \varnothing[$, который можно, используя Теорему 9, преобразовать в C-систему $\begin{bmatrix} \{П\} & * & * \\ * & \{З\} & * \end{bmatrix}$.

Теперь у нас два истинных высказывания и, чтобы сузить поиск, необходимо найти их пересечение, используя Теорему 7. Тогда

$$[* \; \{П, К\} \; \{К, З\}] \cap \begin{bmatrix} \{П\} & * & * \\ * & \{З\} & * \end{bmatrix} = [\{П\} \; \{П, К\} \; \{К, З\}].$$

Получен ответ в виде 4-х вариантов элементарных кортежей:

1) $(П, П, К)$;

2) $(П, П, З)$;

3) $(П, К, К)$;

4) $(П, К, З)$.

Но из этих 4-х вариантов условию задачи соответствует только один – 4-й, так как в других вариантах имеются пещеры с одинаковым содержимым. Значит, при первом предположении клад находится в пещере с номером 2.

Теперь предположим, что истинно второе высказывание, а первое – ложно. Тогда второе высказывание остается без изменений, а для первого находим дополнение. Получаем D-кортеж $]\varnothing \; \{З\} \; \{П\}[$, который можно, используя Теорему 9, преобразовать в C-систему $\begin{bmatrix} * & \{З\} & * \\ * & * & \{П\} \end{bmatrix}$.

Вычислим пересечение этих двух высказываний

$$\begin{bmatrix} * & \{З\} & * \\ * & * & \{П\} \end{bmatrix} \cap [\{К, З\} \; \{П, К\} \; *] = [\{К, З\} \; \{П, К\} \; \{П\}].$$

Из всех возможных элементарных кортежей полученного C-кортежа условиям задачи удовлетворяет только элементарный кортеж $(З, К, П)$. Он отличается от кортежа, полученного при проверке первой гипотезы, но нас в данном случае интересует только, где находится клад. Как и в предыдущем варианте, он во второй пещере.

Задача 3. Опять три пещеры, но теперь пустых нет. Клад только в одной из них, в других находятся змеи. У каждой из пещер приделаны таблички с надписями. Причем известно, что истинная только одна из них, остальные ложные. А какая из этих надписей истинная, нам неизвестно. Надписи такие:

1-я пещера: «Клад во 2-й пещере».

2-я пещера: «Здесь змеи».

3-я пещера: «Здесь змеи».

Попробуем найти клад. Универсум задачи такой:

$\{K, З\}\times\{K, З\}\times\{K, З\}$.

Надпись на 1-й пещере: $[* \ \{K\} \ *]$;

Надпись на 2-й пещере: $[* \ \{З\} \ *]$;

Надпись на 3-й пещере: $[* \ * \ \{З\}]$.

Выдвигаем гипотезы. Первая: на 1-й пещере надпись истинная, на других – ложные. Если высказывание ложное, то истинным будет его дополнение. Здесь можно использовать Теорему 13. Тогда получим следующие истинные при сделанном предположении высказывания:

$[* \ \{K\} \ *]$;

$[* \ \{K\} \ *]$;

$[* \ * \ \{K\}]$.

Если найдем их пересечение, то получим C-кортеж $[* \ \{K\} \ \{K\}]$, это противоречит условию, что клад находится только в одной пещере.

Проверим следующую гипотезу: на 2-й пещере надпись истинная, на других – ложные. После вычисления истинных высказываний для первой и третьей пещер получим

$[* \ \{З\} \ *]$;

$[* \ \{З\} \ *]$;

$[* \ * \ \{K\}]$.

Их пересечение дает результат $[* \ \{З\} \ \{K\}]$. Из двух элементарных кортежей этого C-кортежа, $(З, З, K)$ удовлетворяет всем условиям задачи. Значит, клад в 3-й пещере.

Для полноты картины рассмотрим третью гипотезу: на 3-й пещере надпись истинная, на других – ложные. После вычисления дополнений для надписей на первой и на второй пещерах найдем:

$[* \ \{З\} \ *]$;

[* {*К*} *];

[* * {*З*}].

Пересечение этих *С*-кортежей равно пустому *С*-кортежу. Следовательно, третья гипотеза неприемлема. Итак, правильной оказалась только одна гипотеза, и полученный ответ (клад в 3-й пещере) однозначен.

Задача 4 [17]**.** Эта задача относится к серии задач об узнике, которому король предложил получить свободу, если он определит, в какой из комнат находится принцесса. Причем узник должен был не только определить, но и открыть эту комнату. Сложность заключалась в том, что в одной из комнат находился тигр, встреча с которым для узника была явно нежелательна. В то же время встреча с принцессой сулила узнику не только освобождение, но и возможность жениться на ней. Подсказками были надписи на дверях комнат, причем истинность или ложность подсказок заранее не была известна.

Узнику предложили на выбор три комнаты, в одной из них находилась принцесса, в другой тигр, а третья была пуста, причем известно, что надпись на двери комнаты с принцессой истинна, на двери комнаты с тигром – ложна, а надпись на двери пустой комнаты могла быть истинной или ложной. Надписи были такими:

комната 1: Комната 3 пуста;

комната 2: Тигр сидит в комнате 1;

комната 3: Эта комната пуста.

Где находится принцесса? Мы даже не знаем, какие надписи ложны, а какие истинны, поскольку не известно, где кто находится.

Используем методы АК. Универсум содержит три атрибута (комнаты), в каждом из атрибутов возможны три ситуации. Обозначим ситуации числами:

П – пустая комната;

Пр – комната с принцессой;

Т – комната с тигром.

Тогда универсум всех возможных ситуаций задается как ДП

$\{П, Пр, Т\} \times \{П, Пр, Т\} \times \{П, Пр, Т\}$.

В соответствии с принятыми обозначениями, надписи на дверях комнат выразятся в виде *С*-кортежей:

комната 1: [* * {П}];

комната 2: [{Т} * *];

комната 3: [* * {П}].

Решение будем искать с помощью гипотез, в которых формулируется предполагаемое местоположение принцессы. Если при какой-либо гипотезе получится, что система не имеет противоречий, то эта гипотеза принимается, в противном случае отвергается. Если же непротиворечивыми окажутся две разные гипотезы с неодинаковым результатом, значит, задача содержит неопределенность, ее решение не единственно.

Рассмотрим первую гипотезу. Предположим, что принцесса в первой комнате. Тогда получим следующие АК-объекты:

Комната 1: $[\{Пр\} * *]$ – первая гипотеза. Следовательно, надпись на дверях этой комнаты истинна, это означает, что комната 3 пуста:

Комната 3: $[* * \{П\}]$

Из полученных результатов следует, что тигр во второй комнате, и надпись на ее дверях ложная. Поэтому истинной должна быть следующая запись:

Комната 2: $[\{П, Пр\} * *]$.

Проверим совместимость истинных (по нашему предположению) высказываний, вычислив их пересечение:

$$[\{Пр\} * *] \cap [* * \{П\}] \cap [\{П, Пр\} * *] = [\{Пр\} * \{П\}].$$

Следовательно, принцесса в первой комнате. Но этого недостаточно, надо проверить и другие варианты, так как вполне возможен другой непротиворечивый результат. Предположим, что принцесса в комнате 2. Тогда:

Комната 2: $[* \{Пр\} *]$ – гипотеза «Принцесса во 2-й комнате». Следовательно, надпись на дверях этой комнаты истинна, это означает, что в комнате 1 тигр:

Комната 1: $[\{Т\} * *]$, следовательно, надпись на двери этой комнаты ложная, т. е. комната 3 не пуста:

Комната 3: $[* * \{Пр, Т\}]$.

Проверим совместимость этих трех высказываний. Пересечение *С*-кортежей дает *С*-кортеж $[\{Т\} \{Пр\} \{Пр, Т\}]$, который противоречит условию, что одна из комнат должна быть пустой. Следовательно, предложенная гипотеза не годится.

Третья гипотеза (принцесса в комнате 3) легко опровергается, поскольку на двери 3-й комнаты написано $[* * \{П\}]$, чего не может быть, так как принцесса говорит только правду.

Таким образом, совместимым является только первый вариант, из чего следует, что принцесса находится в комнате 1.

Задача 5. Команды А, Б, В, Г участвовали в эстафете. До соревнований три болельщика высказали следующие прогнозы.

1) команда А займёт 1-е место, команда Б – 2-е;

2) команда А займёт 2-е место, В – 3-е;

3) команда В – 4-е место, Г – 2-е.

В каждом прогнозе одна часть подтвердилась, а другая – нет. Какое место заняла каждая из команд, если учесть, что все команды заняли разные места?

В этой задаче атрибутами будут команды (схема отношения [АБВГ]), а доменами атрибутов – места $\{1, 2, 3, 4\}$. Рассмотрим высказывание первого болельщика (Б1). Если бы оно было истинным, то его можно было бы выразить с помощью C-кортежа $[\{1\}\ \{2\} * *]$. Если в этом высказывании подтверждается только одна часть, то для той части, которая не подтверждается, вычисляется дополнение соответствующей компоненты. Тогда возможны два варианта: $[\{2, 3, 4\}\ \{2\} * *]$ или $[\{1\}\ \{1, 3, 4\} * *]$. Их можно представить в виде C-системы

$$\text{Б1[АБВГ]} = \begin{bmatrix} \{1\} & \{1,3,4\} & * & * \\ \{2,3,4\} & \{2\} & * & * \end{bmatrix}.$$

Аналогично выразим высказывания остальных двух болельщиков.

$$\text{Б2[АБВГ]} = \begin{bmatrix} \{2\} & * & \{1,2,4\} & * \\ \{1,3,4\} & * & \{3\} & * \end{bmatrix};$$

$$\text{Б3[АБВГ]} = \begin{bmatrix} * & * & \{4\} & \{1,3,4\} \\ * & * & \{1,2,3\} & \{2\} \end{bmatrix}.$$

С целью уменьшения числа возможных вариантов вычислим пересечение этих C-систем (Теорема 8).

$$\begin{bmatrix} \{1\} & \{1,3,4\} & * & * \\ \{2,3,4\} & \{2\} & * & * \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} \{2\} & * & \{1,2,4\} & * \\ \{1,3,4\} & * & \{3\} & * \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \{1\} & \{1,3,4\} & \{3\} & * \\ \{2\} & \{2\} & \{1,2,4\} & * \\ \{3,4\} & \{2\} & \{3\} & * \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \{1\} & \{1,3,4\} & \{3\} & * \\ \{2\} & \{2\} & \{1,2,4\} & * \\ \{3,4\} & \{2\} & \{3\} & * \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} * & * & \{4\} & \{1,3,4\} \\ * & * & \{1,2,3\} & \{2\} \end{bmatrix} =$$

$$
= \begin{bmatrix} \{1\} & \{1,3,4\} & \{3\} & \{2\} \\ \{2\} & \{2\} & \{4\} & \{1,3,4\} \\ \{2\} & \{2\} & \{1,2\} & \{2\} \\ \{3,4\} & \{2\} & \{3\} & \{2\} \end{bmatrix}.
$$

Рассмотрим внимательно C-кортежи в полученной C-системе. Оказывается, 2-й, 3-й и 4-й C-кортежи противоречат условиям задачи, так как в них разные команды занимают одно и то же 2-е место. Для дальнейшего анализа подходит только первый C-кортеж: $[\{1\}\ \{1, 3, 4\}\ \{3\}\ \{2\}]$. Из 4-х его элементарных кортежей условиям задачи соответствует (1, 4, 3, 2). Следовательно, места распределились так: 1-е место А, 2-е – Г, 3-е – В, 4-е – Б.

4. Обобщенные операции в алгебре кортежей

4.1. Операции с атрибутами

Выше мы изучали аналитические возможности АК, используя только однотипные структуры. Однако на практике часто необходимо выполнять операции со структурами, имеющими разные схемы отношения. Оказывается, для этого необходимо, помимо операций с АК-объектами, ввести операции с их атрибутами, а именно: переименование атрибутов, обращение бинарных отношений, перестановка атрибутов, добавление фиктивного атрибута, удаление (элиминация) атрибута. Рассмотрим их по порядку.

1. Переименование атрибутов иногда требуется при операциях с отношениями с целью прослеживания связей, например, родители – дети – внуки.

2. Обращение бинарных отношений – операция, с помощью которой образуется отношение, обратное исходному отношению. В частности, отношение «меньше» при обращении становится отношением «больше». Для выполнения операции обращения отношения, заданного бинарным АК-объектом, необходимо в схеме отношения изменить порядок атрибутов. Само отношение при этом не изменяется.

Например, отношение $x < y$ на множестве чисел $\{1, 2, 3\}$ можно выразить с помощью C-системы $L[XY] = \begin{bmatrix} \{1\} & \{2,3\} \\ \{2\} & \{3\} \end{bmatrix}$. Если поменять местами атрибуты в схеме отношения, то получим отношение

$M[YX] = \begin{bmatrix} \{1\} & \{2,3\} \\ \{2\} & \{3\} \end{bmatrix}$, которое означает $y < x$ или $x > y$. По сути, при обращении бинарных отношений выполняется двойное переименование атрибутов. Другой способ выполнения операции обращения заключается в том, что в АК-объекте меняются местами столбцы, а порядок атрибутов в схеме отношения не изменяется. Таким способом $L[XY] = \begin{bmatrix} \{1\} & \{2,3\} \\ \{2\} & \{3\} \end{bmatrix}$ преобразуется в $M[XY] = \begin{bmatrix} \{2,3\} & \{1\} \\ \{3\} & \{2\} \end{bmatrix}$.

3. Перестановка атрибутов – операция, при выполнении которой в матрице АК-объекта меняются местами столбцы, и одновременно в схеме отношения переставляются соответствующие атрибуты.

При перестановке атрибутов содержание отношения, заданного АК-объектом, не изменяется. Эта операция необходима, чтобы привести АК-объекты с одинаковыми, но расположенными в разном порядке атрибутами, к виду, удобному для выполнения с ними операций алгебры множеств.

Например, C-система $P[YXZ] = \begin{bmatrix} \{f,h\} & \{a,b,d\} & \{b\} \\ * & \{b,c\} & \{a,c\} \end{bmatrix}$ при перестановке атрибутов преобразуется в эквивалентную C-систему $P[XYZ] = \begin{bmatrix} \{a,b,d\} & \{f,h\} & \{b\} \\ \{b,c\} & * & \{a,c\} \end{bmatrix}$.

4. Добавление фиктивного атрибута осуществляется только если добавляемый атрибут отсутствует в схеме отношения АК-объекта. При выполнении этой операции одновременно в схему отношения добавляется имя нового атрибута, а в структуру на соответствующее место вставляется новый столбец с фиктивными компонентами, причем в C-кортежи и C-системы добавляются фиктивные компоненты "$*$", а в D-кортежи и D-системы – фиктивные компоненты "$\varnothing$".

Спрашивается, в чем смысл этой операции? Рассмотрим пример.

Пример 9. В базе данных некоторой фирмы имеется отношение со структурой *Персонал*_1(ФИО, Должность). В этом отношении год рождения сотрудников не указан, следовательно, в пределах разумного диапазона он может быть любым. Значит, в отношение *Персонал*_1 можно добавить фиктивный атрибут «Год рождения», но вместо конкретного года рождения в каждой строке нужно поставить фиктивную компоненту «*». По сути ничего не изменилось, но появляется возможность восстановить в отношении *Персонал*_1 год рождения каждого сотрудника, если, допустим, имеется другое отношение со структурой *Персонал*_2(ФИО, Год рождения). Один из возможных алгоритмов такого восстановления таков:

1) Добавить фиктивный атрибут «Год рождения» в отношение *Персонал*_1;
2) Добавить фиктивный атрибут «Должность» в отношение *Персонал*_2;
3) Выполнить пересечение полученных однотипных отношений.

Аналогичный алгоритм можно использовать при решении некоторых задач в разделе 3, например, в Задаче 2 (Поиск клада). Атрибутами там были пещеры с номерами 1, 2 и 3. Обозначим их соответственно X, Y, Z. Тогда первое высказывание «Во 2-й пещере нет змей, а 3-я пещера не пуста» можно выразить C-кортежем $M_1[YZ] = [\{П, К\}\ \{К, З\}]$, а второе «1-я пещера не пуста, а во 2-й нет змей» – как C-кортеж

$M_2[XY] = [\{К, З\}\ \{П, К\}]$.

Если предположить, что второе высказывание ложно, то истинным высказыванием будет C-система $\overline{M_2}\,[XY] = \begin{bmatrix} \{П\} & * \\ * & \{З\} \end{bmatrix}$. Для получения решения необходимо найти пересечение АК-объектов с разными схемами отношения: $M_1[YZ] \cap \overline{M_2}\,[XY]$. Чтобы это сделать, требуется привести эти АК-объекты к одинаковым схемам отношения, добавив фиктивный атрибут X в $M_1[YZ]$ и фиктивный атрибут Z в $\overline{M_2}\,[XY]$. Потом выполним операцию пересечения с полученными однотипными АК-объектами:

$$M_1[YZ] \cap \overline{M_2}\,[XY] = [*\ \{П, К\}\ \{К, З\}] \cap \begin{bmatrix} \{П\} & * & * \\ * & \{З\} & * \end{bmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что результат оказывается тем же самым.

При добавлении фиктивных атрибутов в D-кортежи или в D-системы необходимо добавлять атрибуты с компонентами «∅». Обоснование этого правила таково.

Теорема 28. Добавление нового фиктивного атрибута с компонентами «∅» в D-кортеж или D-систему соответствует тому, что в эквивалентные им C-системы добавляется фиктивный атрибут с полными компонентами.

Доказательство теоремы приведено в [6, 7].

5. Элиминация атрибута осуществляется так: из АК-объекта удаляется столбец, а из схемы отношения – соответствующий атрибут.

Обозначим $+Atr$ операцию добавления фиктивного атрибута, а $-Atr$ – операцию элиминации атрибута. Например, запись $+X(M_1[YZ])$ означает, что в АК-объект $M_1[YZ]$ добавлен фиктивный атрибут X.

Другой пример: пусть задана C-система

$$R[XYZ] = \begin{bmatrix} \{b,c\} & \{a\} & \{a,b\} \\ \{a\} & \{b,c\} & \{a,c\} \end{bmatrix}.$$

Тогда $-Y(R[XYZ]) = \begin{bmatrix} \{b,c\} & \{a,b\} \\ \{a\} & \{a,c\} \end{bmatrix}$.

Если отношение задано как таблица элементарных кортежей, то элиминация атрибутов означает вычисление *проекции* этого отношения, в результате чего получается отношение с сокращенной схемой отношения. Например, если задано отношение $R[XYZ]$, то его проекции можно представить схемами $[XZ]$, $[YZ]$, $[Y]$ и т. д.

Проекции отношений получаются и при элиминации атрибутов из C-кортежей и C-систем. Однако элиминация атрибутов из D-кортежей и D-систем дает не проекцию данного отношения, а нечто другое. Более подробно об этом говорится в разделе 5.

4.2. Обобщенные операции

Операции $+Atr$ и $-Atr$ используются, в частности, при выполнении операций соединения и композиции, которые играют важную роль в теории отношений. Пусть даны два отношения, выраженные АК-объектами $P[XY]$ и $Q[YZ]$.

Тогда операция ***соединения отношений*** ($\triangleright\triangleleft$) выполняется с помощью следующего алгоритма:

$P[XY] \triangleright\triangleleft Q[YZ] = +Z(P[XY]) \cap +X(Q[YZ])$.

Операция ***композиции отношений*** ($\circ$) выполняется с помощью следующего алгоритма:

$P[XY] \circ Q[YZ] = -Y(P[XY] \triangleright\triangleleft Q[YZ])$.

В качестве примера применения этих операций рассмотрим вычисление отношения «персоны – их внуки» с помощью отношения «родители – дети». Пусть дано отношение РОДИТЕЛИ[X, Y], в котором первый элемент пары обозначает родителя, а второй – его (или ее) ребенка. В результате соединения отношения РОДИТЕЛИ с самим собой получается трехместное отношение "персоны – их дети – их внуки", а в результате последующей композиции образуется двухместное отношение "персоны – их внуки".

Формально это выполняется так. Пусть $P[XY]$ – АК-объект, представляющий отношение РОДИТЕЛИ$[X, Y]$. Переименуем в $P[XY]$ атрибуты, получим АК-объект $P[YZ]$. Чтобы получить отношение "персоны – их дети – их внуки", вычислим соединение:

$P[XY] \rhd\lhd P[YZ] = +Z(P[XY]) \cap +X(P[YZ])$.

А чтобы получить отношение "персоны – их внуки", надо вычислить композицию этих отношений:

$P[XY] \circ P[YZ] = -Y(P[XY] \rhd\lhd P[YZ])$.

Рассмотрим пример. Пусть отношение РОДИТЕЛИ$[X, Y]$ задано с помощью C-системы $P[XY] = \begin{bmatrix} \{a,b\} & \{c,f,g\} \\ \{f\} & \{h,k\} \end{bmatrix}$. Тогда

$$P[XY] \rhd\lhd P[YZ] = \begin{bmatrix} \{a,b\} & \{c,f,g\} & * \\ \{f\} & \{h,k\} & * \end{bmatrix} \cap$$

$$\cap \begin{bmatrix} * & \{a,b\} & \{c,f,g\} \\ * & \{f\} & \{h,k\} \end{bmatrix} = [\{a, b\}\ \{f\}\ \{h, k\}].$$

$P[XY] \circ P[YZ] = [\{a, b\}\ \{h, k\}]$.

При выполнении операции композиции в АК необходимо учитывать, что операция **–***Atr* на завершающем этапе выполнения этой операции корректна лишь в тех случаях, когда в результате операции соединения получен C-кортеж или C-система. В противном случае перед выполнением операции –*Atr* требуется преобразовать этот АК-объект в C-систему.

Операции соединения и композиции отношений можно обобщить на случай, когда вместо атрибутов X, Y, Z в отношениях используются множества $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$ атрибутов.

Пусть заданы два АК-объекта $P[\boldsymbol{V}]$ и $Q[\boldsymbol{W}]$, где $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{W}$ – некоторые множества атрибутов, причем $\boldsymbol{V} \neq \boldsymbol{W}$. Эти множества можно разложить на непересекающиеся подмножества $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$ с помощью следующих преобразований:

$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{V} \setminus \boldsymbol{W}$; $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{W} \cap \boldsymbol{V}$; $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{W} \setminus \boldsymbol{V}$.

Тогда получим $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{X} \cup \boldsymbol{Y}$ и $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{Y} \cup \boldsymbol{Z}$. С учетом этого данные отношения можно переписать как $P[\boldsymbol{XY}]$ и $Q[\boldsymbol{YZ}]$, а операции соединения и композиции выполнять так же, как и в случае бинарных отношений $P[XY]$ и $Q[YZ]$, но вместо отдельных атрибутов X, Y и Z использовать множества $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ и $\boldsymbol{Z}$.

Рассмотрим обобщенные операции и сравнения, позволяющие выполнять операции с АК-объектами и сравнивать их в тех случаях, когда их схемы отношений не совпадают.

Предположим, имеются АК-объекты с разными схемами отношений, и требуется произвести с ними какие-либо бинарные операции (пересечение или объединение) или сравнения алгебры множеств. Для этого достаточно использовать операцию $+Atr$, чтобы привести АК-объекты к единой схеме отношения. Тем самым определим новый тип операций в АК.

Определение 11. ***Обобщенными операциями*** $\cap_G$ и $\cup_G$ в АК называются операции пересечения ($\cap$) и объединения ($\cup$) произвольных АК-объектов с предварительным приведением их к единой схеме отношения за счет добавления недостающих фиктивных атрибутов.

Нетрудно убедиться, что операция $\cap_G$ при условии, что схемы отношений АК-объектов разные и содержат совпадающие атрибуты, соответствует операции соединения отношений.

Наряду с обобщенными операциями, в АК можно ввести ***обобщенные отношения*** ($=_G$, $\subseteq_G$, $\subset_G$). Если надо сравнить на равенство или включение два АК-объекта с разными схемами отношений, то нужно предварительно преобразовать эти АК-объекты в однотипные за счет добавления недостающих фиктивных атрибутов.

Нетрудно убедиться, что обобщенные операции и отношения в АК обладают всеми свойствами соответствующих операций алгебры множеств и отличаются от последних только тем, что для их применения необязательно совпадение схем отношений.

С помощью обобщенных операций в АК можно выполнять все операции и сравнения алгебры множеств с любыми АК-объектами. Это свойство АК отражается следующим утверждением.

Теорема 29. В алгебре кортежей для операций $\neg$, $\cap_G$, $\cup_G$ и сравнений $=_G$, $\subseteq_G$, $\subset_G$ справедливы все законы алгебры множеств.

5. Логический анализ в алгебре кортежей

5.1. Краткие сведения о логических исчислениях

Здесь приводятся только отдельные сведения из математической логики, с помощью которых можно проследить связь между исчислениями и АК. Более подробные сведения даны в книге [3], которую нетрудно найти в Интернете.

В современной математике наиболее известны и широко применяются системы логического вывода на основе ***исчисления высказываний*** и ***исчисления предикатов***, представляющих основные разделы ***математической логики***. Дадим их краткое описание. Вначале предлагается ***алфавит***, из него по определенным правилам конструируются ***формулы***. Среди формул выбираются те, которые играют роль ***аксиом***. Далее формулируются ***правила вывода***, позволяющие вывести из аксиом новые формулы – ***теоремы***, которые, в свою очередь, можно использовать вместе с аксиомами для вывода других теорем.

5.1.1. Исчисление высказываний

Рассмотрим сначала исчисление высказываний (ИВ). Алфавит ИВ содержит:

1) ***пропозициональные переменные***, которые часто обозначаются прописными буквами латинского алфавита с индексами или без них (A, G, B_2, C_j и т. д.);

2) ***логические связки***: $\neg$ (***отрицание*** – НЕ), $\wedge$ (***конъюнкция*** – И), $\vee$ (***дизъюнкция*** – ИЛИ), $\supset$ (***импликация***);

3) ***логические константы***: $\boldsymbol{F}$ (ложь – false), $\boldsymbol{T}$ (истина – true);

4) ***скобки***: «(» и «)»;

Пропозициональные переменные служат для обозначения высказываний и могут принимать только одно из двух значений ($\boldsymbol{F}$ или $\boldsymbol{T}$). Свойства логических связок $\neg$, $\wedge$ и $\vee$ в основном соответствуют их значениям на естественном языке.

Что касается импликации ($\supset$), для нее не все так просто. Нередко в публикациях по математической логике ее переводят как «Если …, то…», но это не всегда правильно. В задачах логического вывода часто встречается случай, когда даны формулы A, B и $A \supset B$, и надо проверить, следует ли B из A. Если это не подтверждается, то перевод формулы $A \supset B$ как «если A, то B» не имеет смысла, хотя сама формула $A \supset B$ и в этом случае вполне допустима. Поэтому правильнее полагать, что импликация соответствует выражению «Если …, то…» не во всех случаях.

Для конструирования формул в ИВ используются следующие правила:

1) пропозициональные переменные и константы есть формулы;
2) если A – формула, то $\neg(A)$ тоже формула;
3) если A и B – формулы, то $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\supset B)$ тоже формулы;
4) других формул нет.

В соответствии с этими правилами можно записывать более сложные формулы, например $(\neg((A \vee B) \wedge (\neg(A \supset C))))$. Иногда некоторые скобки можно не записывать, если это не приводит к двусмысленности, например, пишут $\neg A \vee B \vee C$ вместо $(\neg(A) \vee (B \vee C))$.

Связку «$\wedge$» иногда обозначают как «&». Логические связки часто называют *операциями*. Кроме перечисленных логических связок, в ИВ определены другие логические связки, которые здесь не рассматриваются. Например, одной из таких связок является ***эквивалентность*** ($\equiv$).

Точный смысл логических связок определяется с помощью таблиц истинности, где устанавливаются значения истинности формул в зависимости от значений истинности входящих в формулу пропозициональных переменных.

С помощью таблиц истинности для связок вычисляют значения истинности для сложных формул ИВ, содержащих эти связки.

Таблица 2
(отрицание)

A	$\neg A$
F	***T***
T	***F***

Таблица 3
(конъюнкция)

A	B	$A\wedge B$
F	***F***	***F***
F	***T***	***F***
T	***F***	***F***
T	***T***	***T***

Таблица 4
(дизъюнкция)

A	B	$A\vee B$
F	***F***	***F***
F	***T***	***T***
T	***F***	***T***
T	***T***	***T***

Таблица 5
(импликация)

A	B	$A\supset B$
F	***F***	***T***
F	***T***	***T***
T	***F***	***F***
T	***T***	***T***

Таблица 6
(эквивалентность)

A	B	$A\equiv B$
F	***F***	***T***
F	***T***	***F***
T	***F***	***F***
T	***T***	***T***

Законы исчисления высказываний совпадают с законами алгебры множеств. При этом отрицанию соответствует дополнение, конъюнкции – пересечение, дизъюнкции – объединение множеств. Приведем некоторые из законов логики (сравните их с соответствующими законами алгебры множеств (часть I, раздел 3)).

Закон двойного отрицания

$\neg\neg A = A$.

Законы де Моргана:

$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$;

$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$.

Законы дистрибутивности:

Дистрибутивность конъюнкции:

$A \wedge (B \vee C \vee \ldots \vee D) = ((A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee \ldots \vee (A \wedge D))$.

Дистрибутивность дизъюнкции:

$A \vee (B \wedge C \wedge \ldots \wedge D) = ((A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge \ldots \wedge (A \vee D))$.

Закон контрапозиции:

$A \supset B$ равносильно $\neg B \supset \neg A$.

Импликацию можно выразить с помощью других логических связок:

$A \supset B = \neg A \vee B$.

Определим два вида формул, играющих важную роль в теории логического вывода.

Определение 12. ***Общезначимой формулой*** (или ***тавтологией***) называется логическая формула, значение которой равно $\boldsymbol{T}$ при любых значениях содержащихся в ней пропозициональных переменных.

Определение 13. ***Тождественно ложной формулой*** (или ***противоречием***) называется логическая формула, значение которой равно $\boldsymbol{F}$ при любых значениях содержащихся в ней пропозициональных переменных.

Примерами тавтологий являются следующие формулы:

1) $\neg A \vee A$; 2) $A \supset (B \supset A)$; 3) $A \vee (\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$.

Примеры противоречий содержатся в формулах:

1) $A \wedge \neg A$; 2) $A \wedge B \wedge \neg A$; 3) $A \wedge (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$.

В АК тавтологии соответствуют АК-объекты, равные универсуму, а противоречию – пустые АК-объекты

Отметим, что импликация соответствует отношению включения множеств, но при определенных условиях. Рассмотрим случай, когда A и

B – логические формулы. Из этих формул можно составить формулу $A \supset B$. Предположим, что формулам A и B соответствуют АК-объекты P_A и P_B. Тогда общезначимость формулы $A \supset B$ равносильна тому, что для P_A и P_B справедливо соотношение $P_A \subseteq P_B$.

В теоретических основаниях исчислений в качестве аксиом используются общезначимые формулы. Они выбираются так, чтобы из них с помощью правил вывода можно было вывести все остальные логические законы. Известно несколько вариантов выбора аксиом и правил вывода для ИВ. В последние десятилетия чаще используется следующая система аксиом [3]. Пусть A, B и C – произвольные формулы. Тогда аксиомы ИВ имеют следующий вид:

(A1) $A \supset (B \supset A)$;

(A2) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$;

(A3) $(\neg B \supset \neg A) \supset ((\neg B \supset A) \supset B)$.

Известны системы, содержащие 10 аксиом ИВ. Приведенная выше система из трех аксиом, по-видимому, получила признание в силу ее лаконичности. Хотя смысл самих аксиом понять нелегко.

Правило вывода в ИВ таково:

Modus ponens (модус поненс) (*MP*): если A и $A \supset B$ – выводимые формулы, то B – выводимая формула.

Кроме того, в некоторых вариантах исчислений используется

правило подстановки: все вхождения пропозициональной переменной в формулу можно заменить одной и той же произвольной формулой.

Работу такой системы можно понять на следующем примере [3]. Пусть необходимо вывести из приведенных выше аксиом теорему $A \supset A$. Вывод осуществляется по шагам:

1) Из (***A*2**) выводится формула

$(A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset ((A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A))$

с помощью двух подстановок: $A \supset A$ вместо B и A вместо C;

2) Из (***A*1**) выводится формула $A \supset ((A \supset A) \supset A)$ с помощью подстановки $A \supset A$ вместо B;

3) Из 2) и 1) выводится $(A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A)$ с помощью правила *MP* – можно проверить, что формула, выведенная на шаге 2), совпадает с левой частью формулы, выведенной на шаге 1), следовательно, правая часть формулы 1) – выводимая формула;

4) Из (**$A1$**) выводится формула $A \supset (A \supset A)$ с помощью подстановки A вместо B;

5) Из 4) и 3) выводится $A \supset A$ с помощью правила MP.

Приведенный вывод формулы $A \supset A$ из аксиом исчисления высказываний считается самым коротким. Этот пример показывает, что найти оптимальную последовательность правил для вывода теорем оказывается далеко не простым делом.

В приложениях логического вывода (к ним относятся моделирование рассуждений [18], автоматическое доказательство теорем [19] и т. д.) данная система оказывается весьма неудобной. Во-первых, в качестве посылок далеко не всегда используются общезначимые формулы, во-вторых, предлагаемые в логических исчислениях правила вывода не пригодны для эффективной автоматизации систем логического вывода.

На практике [19] в качестве системы логического вывода часто используется следующий метод: посылки (A_i) и предполагаемое следствие (C) объединяют в одну формулу, соединяя знаком конъюнкции все посылки A_i и формулу $\neg C$. В математической логике доказано, что эта объединенная формула будет противоречием в том и только в том случае, если формула C есть следствие посылок A_i.

Например, если посылки заданы формулами A_1, A_2, A_3, а предполагаемое следствие есть формула C, то объединенной формулой будет $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \neg C$. Если доказана противоречивость этой формулы, тем самым будет доказано, что формула C логически следует из формул A_1, A_2, A_3.

Рассмотрим два часто встречающихся типа формул ИВ. Назовем ***литералом*** пропозициональную переменную или ее отрицание (например, A, $\neg C$, $\neg D$ – литералы).

Пусть X, Y, …, Z – литералы. Тогда формула вида $X \wedge Y \wedge \ldots \wedge Z$ называются ***конъюнктом***, а формула вида $X \vee Y \vee \ldots \vee Z$ – ***дизъюнктом***.

Например, формула $\neg A \wedge B \wedge \neg C$ есть конъюнкт, а формула $A \vee \neg B \vee C$ – дизъюнкт.

Определение 14. Если $C_1, C_2, \ldots, C_n$, – конъюнкты, то формула $C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_n$ называется ***дизъюнктивной нормальной формой*** (т. е. дизъюнкцией конъюнктов) или сокращенно ***ДНФ***.

Определение 15. Если $D_1, D_2, \ldots, D_n$, – дизъюнкты, то формула $D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_n$ называется ***конъюнктивной нормальной формой*** (т. е. конъюнкцией дизъюнктов) или сокращенно ***КНФ***.

Например, формула $(A \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (C \wedge D)$ – ДНФ,
а формула $(A \vee \neg C) \wedge (B \vee \neg C \vee \neg D) \wedge (C \vee D)$ – КНФ.

Доказано, что в исчислении высказываний любую формулу можно преобразовать в ДНФ или в КНФ. Эти типы формул можно легко выразить в структурах АК.

Пусть задана формула ИВ, содержащая множество пропозициональных переменных A_i. Тогда множество равенств типа $A_i = \boldsymbol{F}$ или $A_i = \boldsymbol{T}$ для всех пропозициональных переменных называется ***подстановкой*** данной формулы. Например, для формулы $(A \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg C)$ множество равенств $A = \boldsymbol{F}$, $B = \boldsymbol{T}$, $C = \boldsymbol{F}$ есть подстановка этой формулы.

Определение 16. ***Выполняющей подстановкой*** формулы ИВ называется подстановка, при которой формула принимает значение $\boldsymbol{T}$.

5.1.2. Исчисление предикатов

В исчислении предикатов (ИП) вместо пропозициональных переменных используются более сложные структуры – ***предикаты***. При этом правила конструирования формул с помощью определенных выше логических связок в ИП те же, что и в ИВ. Предикат считается минимальной формулой (***атомом***).

Кроме того, в ИП вводятся новые логические связки, называемые ***кванторами***. К ним относятся:

квантор $\forall$ – все, для всех (обозначение от английского *all*);

квантор $\exists$ – существует, хотя бы один из (обозначение от английского *exist*).

Рассмотрим структуру предикатов. Они отображают отношения и поэтому бывают одноместными, двухместными, n-местными и т. д. Имеются даже 0-местные предикаты – к ним относятся противоречия и тавтологии, а также логические константы $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{T}$.

Прежде чем определить предикаты, нужно определить *термы*, которые являются необходимой составной частью предикатов.

Определение 17. ***Термами*** могут быть только три типа объектов;

переменные: x, y, y_j, z_1, w и т. д.;

константы: a, b, d, c_1, b_i и т. д.;

n-местные функции от термов: $f(y)$, $g(a, x)$, $h(a, y, g(x, c))$ и т. д.

Здесь f – одноместная функция, g – двухместная, а h – трехместная. Области определения переменных в ИП могут быть любыми, включая бесконечные множества.

Определение 18. ***Предикаты*** в ИП есть модели многоместных отношений, которые обозначаются прописными латинскими буквами с индексами или без них, рядом с ними в круглых скобках перечисляются термы, разделяемые запятыми.

Например, $P(x)$, $R(a, f(b, y), z)$ – обозначения предикатов, соответственно P – одноместный предикат, а R – трехместный.

Интерпретация предикатов несколько отличается от интерпретации отношений. Как известно, отношение – это подмножество элементарных кортежей, содержащихся в универсуме. Предикат же включает в себя все элементарные кортежи универсума, но при этом некоторые из них имеют значение ***T***, а остальные – ***F***. Таким образом, ***отношения*** (в том числе и АК-объекты) – ***это области истинности соответствующих предикатов***.

Схемы отношений в предикатах явно не формулируются – по записи предиката можно однозначно определить его местность (размерность), но не всегда ясно, какому атрибуту соответствуют термы, присутствующие в записи предиката, так как понятие атрибута в математической логике не определено. К тому же в теории ИП предполагается, что все переменные имеют одну и ту же «предметную область» (или «область интерпретации»).

Однако в практическом применении ИП постановка задачи нередко позволяет связать термы предиката с соответствующими атрибутами. Например, если предикат $L(x, y)$ обозначает отношение $x < y$ на множестве R чисел, то тем самым утверждается, что данный предикат задан в универсуме $R \times R$.

Рассмотрим кванторы. Заметим сразу, что в математической логике различают исчисление предикатов *первого порядка*, где кванторы применяются только для отдельных переменных (например, $\forall x$, $\exists y$ и т. д.), и исчисление предикатов *высших порядков*, в которых кванторы управляют более сложными структурами (например, предикатами). В данном обзоре речь идет только об исчислении предикатов первого порядка, в силу чего кванторы накладываются только на переменные. Кванторы с переменными записываются перед формулой, в этом случае сама формула есть *область действия* кванторов. Например, запись

$$\forall x \exists y (P(x, y) \wedge \neg Q(y, z, b)) \vee R(x, w) \tag{2.2}$$

означает, что предикат $R(x, w)$ находится за пределами области действия кванторов $\forall x$ и $\exists y$.

Если переменная находится в области действия квантора с этой переменной, то она называется ***связанной***, в противном случае ***свободной***. Например, в формуле (2.2) переменные x и y связаны в подформуле $(P(x, y) \wedge \neg Q(y, z, b))$, но в то же время переменная x свободна в предикате $R(x, w)$.

Интерпретацию кванторов проведем на примере двухместного предиката $P(x, y)$, для которого бинарное отношение $P[XY]$ есть область истинности. Пусть задана формула

$\exists x(P(x, y)$.

Для отношения $P[XY]$ это означает, что все его двухместные элементарные кортежи сокращаются до одноместного кортежа за счет удаления элементов, соответствующих атрибуту X. Таким образом, квантор $\exists x$ перед предикатом или формулой означает, что в соответствующем отношении вычисляется проекция этого отношения за счет элиминации соответствующего атрибута X.

В алгебре кортежей вычисление проекции равносильно элиминации атрибута из любых C-кортежей и C-систем, не содержащих пустых компонент в удаляемых атрибутах.

Рассмотрим квантор $\forall$. Пусть задана формула $\forall x(P(x, y)$.

Моделирующее предикат $P(x, y)$ отношение $P[XY]$ строится следующим образом. Пусть домен атрибута Y равен множеству $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Тогда $P[XY]$ можно выразить как C-систему

$$P[XY] = \begin{bmatrix} A_1 & \{b_1\} \\ A_2 & \{b_2\} \\ \ldots & \ldots \\ A_n & \{b_n\} \end{bmatrix}.$$

Если среди компонент A_i есть пустые компоненты, соответствующие строки удаляются из C-системы (они представляют пустые C-кортежи). С другой стороны, среди A_i могут встретиться полные компоненты. Если они отсутствуют в $P[XY]$, то $\forall x(P(x, y) = \boldsymbol{F}$, т. е. эта формула является противоречием.

Если среди A_i имеются полные компоненты (допустим, это A_k, A_l, A_m), то формуле $\forall x(P(x, y)$ соответствует одноместное отношение $Q[Y] = [\{b_k, b_l, b_m\}]$ или одноместный предикат $Q(y)$, в котором константы b_k, b_l, b_m имеют значение $\boldsymbol{T}$, а все остальные константы переменной y – значение $\boldsymbol{F}$.

Если формуле предшествуют одноименные кванторы (например, $\forall x \forall y(P(x, y))$), то их можно менять местами – смысл формулы от этого не изменится. Но если кванторы разные (например, $\forall x \exists y(P(x, y))$), то в общем случае $\forall x \exists y(P(x, y)) \neq \exists y \forall x(P(x, y))$.

Введение кванторов в ИП влечет введение новых аксиом и правил вывода. В соответствии с [3] в ИП к аксиомам ИВ добавляются две новые аксиомы. Пусть A и B – формулы, и $A(x)$ означает, что в этой формуле переменная x – свободная.

(**A4**) $\forall x A(x) \supset A(t)$, где t – терм, свободный для x, в частности, он может совпадать с x. Тогда (A4) преобразуется в $\forall x A(x) \supset A(x)$.

(**A5**) $\forall x(A \supset B) \supset (A \supset \forall x B)$ при условии, что формула A не содержит свободных вхождений переменной x.

Помимо Modus ponens, в правилах вывода в ИП используется

Правило обобщения (Gen):

из A следует $\forall xA$.

В [3] и в ряде других руководств по математической логике не указывается, является ли переменная x свободной в A. Поэтому можно предположить, что модификация правила Gen в виде «*из A следует* $\forall x A(x)$» вполне допустима (в некоторых учебниках по математической логике правило Gen так и формулируется).

При анализе правил вывода необходимо учесть, что в исчислениях в качестве аксиом используются только тавтологии, соответственно и все выводимые теоремы тоже являются тавтологиями. В то же время при анализе рассуждений или в автоматическом доказательстве теорем в качестве посылок используются произвольные формулы – в этом случае оказывается, что некоторые правила вывода, корректные в исчислениях, становятся ошибочными при анализе рассуждений.

Одно из таких правил – правило обобщения. Если формула A не тавтология и переменная x свободна в A, то выражение «*из A следует* $\forall x A$» есть грубая ошибка, так как для произвольных формул $A(x)$ со свободной переменной x справедливо обратное утверждение «*из* $\forall x A(x)$ *следует* $A(x)$», которое, кстати, соответствует аксиоме (**A4**).

В то же время, если в произвольной формуле A отсутствует свободная переменная x, то правило Gen вполне корректно. Далее мы увидим, что в АК этой формулировке правила обобщения соответствует добавление фиктивного атрибута в АК-объект.

5.2. Логические структуры в алгебре кортежей

5.2.1. Исчисление высказываний в алгебре кортежей

Сначала рассмотрим возможности АК для выражения формул исчисления высказываний. Чтобы это выполнить, достаточно представить универсум логической формулы в виде схемы отношения, в которой атрибутами являются все пропозициональные переменные формулы. При этом каждый атрибут имеет только два возможных значения: 0 и 1 (эти константы будем использовать в АК вместо общепринятых для ИВ констант ***F*** и ***T***). Тогда доменом любого атрибута будет множество {0, 1}.

Рассмотрим интерпретацию логических связок ¬, ∧, ∨, ⊃ и ≡ (см. Таблицы 2, 3, 4, 5, 6 в разделе 5.1.1) в АК. Пусть *A* и *B* – пропозициональные переменные.

Связка «¬» соответствует дополнению компоненты: $\overline{\{1\}} = \{0\}$ и $\overline{\{0\}} = \{1\}$.

Формула $A \wedge B$ соответствует *C*-кортежу $C[AB] = [\{1\}\ \{1\}]$, т. е. каждый из атрибутов имеет только значение «1», иное исключается.

Формула $A \vee B$ означает, что в соответствующем АК-объекте $D[AB]$ сочетание $A = 0$ и $B = 0$ исключается, в силу чего этот АК-объект равен дополнению *C*-кортежа $[\{0\}\ \{0\}]$, что означает $D[AB] =]\{1\}\ \{1\}[$.

Формула $A \supset B$ означает, что в соответствующем АК-объекте $I[AB]$ сочетание $A = 1$ и $B = 0$ исключается, в силу чего этот АК-объект равен дополнению *C*-кортежа $[\{1\}\ \{0\}]$, что означает $I[AB] =]\{0\}\ \{1\}[$.

Формула $A \equiv B$ соответствует *C*-системе $E[AB] = \begin{bmatrix} \{0\} & \{0\} \\ \{1\} & \{1\} \end{bmatrix}$.

Известно, что любую формулу исчисления высказываний можно представить как ДНФ или КНФ, при этом ДНФ можно выразить в АК как *C*-систему, а КНФ – как *D*-систему.

Алгоритм 2 (преобразование ДНФ в *C*-систему):

1) каждый конъюнкт ДНФ сформировать как *C*-кортеж, схема отношения которого содержит все пропозициональные переменные A_i конъюнкта, при этом в самом кортеже на местах литералов A_i и $\neg A_i$ записываются соответственно компоненты {1} и {0};

2) выполнить обобщенное объединение ($\cup_G$) *C*-кортежей, полученных на предыдущем шаге.

Для примера преобразуем формулу

$H = (A \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg C \wedge \neg D) \vee (C \wedge D)$ в C-систему R_H:

1) конъюнкт $(A \wedge \neg C)$ преобразуется в C-кортеж $R_1[AC]=[\{1\}\ \{0\}]$;
конъюнкт $(B \wedge \neg C \wedge \neg D)$ преобразуется в C-кортеж
$R_2[BCD] = [\{1\}\ \{0\}\ \{0\}]$;
конъюнкт $(C \wedge D)$ преобразуется в C-кортеж $R_3[CD] = [\{1\}\ \{1\}]$;

2) $R_H[ABCD] = R_1[AC] \cup_G R_2[BCD] \cup_G R_3[CD] =$

$$= \begin{bmatrix} \{1\} & * & \{0\} & * \\ * & \{1\} & \{0\} & \{0\} \\ * & * & \{1\} & \{1\} \end{bmatrix}.$$

C-системы, соответствующие ДНФ, по сути, представляют множество выполняющих подстановок (см. Определение 16) этой формулы. Например, C-кортеж $[\{1\} * \{0\} *]$ в R_H содержит 4 элементарных кортежа, которые можно получить, вычислив декартово произведение $\{1\} \times \{0, 1\} \times \{0\} \times \{0, 1\}$. Рассмотрим элементарный кортеж $(1, 0, 0, 1)$, содержащийся в этом ДП. Ему соответствует система равенств $A = \boldsymbol{T}$, $B = \boldsymbol{F}$, $C = \boldsymbol{F}$, $D = \boldsymbol{T}$, представляющая собой выполняющую подстановку формулы H.

Также несложно определить, задает ли произвольно заданная подстановка выполняющую постановку формулы. Например, подстановку $A = \boldsymbol{F}$, $B = \boldsymbol{T}$, $C = \boldsymbol{F}$, $D = \boldsymbol{F}$ для формулы H можно преобразовать в элементарный кортеж $(0, 1, 0, 0)$ и убедиться, что он принадлежит второй строке C-системы R_H. А это означает, что данная подстановка – выполняющая подстановка формулы H.

Проверка включения элементарного кортежа в C-систему осуществляется так:

1) преобразовать элементарный кортеж в C-кортеж, например:

$(0, 1, 0, 0) \Rightarrow [\{0\}\ \{1\}\ \{0\}\ \{0\}]$;

2) используя Теорему 1, проверить включение этого C-кортежа в C-кортежи C-системы;

3) если хотя бы одна проверка подтвердится, то данный кортеж принадлежит C-системе.

Кроме того, можно легко вычислить дополнение C-системы R_H в виде D-системы:

$$\overline{R_H}\,[ABCD] = \left]\begin{matrix} \{0\} & \varnothing & \{1\} & \varnothing \\ \varnothing & \{0\} & \{1\} & \{1\} \\ \varnothing & \varnothing & \{0\} & \{0\} \end{matrix}\right[.$$

Полученная D-система соответствует КНФ, равной отрицанию формулы H:

$\neg H = (\neg A \vee C) \wedge (\neg B \vee C \vee D) \wedge (\neg C \vee \neg D)$.

Отсюда несложно сформировать

Алгоритм 3 (преобразование КНФ в D-систему):

1) каждый дизъюнкт КНФ записать как D-кортеж, схема отношения которого содержит все пропозициональные переменные A_i дизъюнкта, при этом в самом кортеже на местах литералов A_i и $\neg A_i$ записываются соответственно компоненты $\{1\}$ и $\{0\}$;

2) выполнить обобщенное пересечение ($\cap_G$) D-кортежей, полученных на предыдущем шаге.

В приложениях ИВ часто встречаются формулы типа $P \supset Q$ и $P \equiv Q$, где P и Q – формулы, которые можно выразить как АК-объекты. Тогда предлагаются следующие алгоритмы.

Алгоритм 4 (преобразование формулы $P \supset Q$ в АК-объект):

1) преобразовать P и Q в АК-объекты R_P и R_Q;

2) вычислить АК-объект $\overline{R_P} \cup_G R_Q$.

Алгоритм 5 (преобразование формулы $P \equiv Q$ в АК-объект):

1) преобразовать P и Q в АК-объекты R_P и R_Q;

2) вычислить АК-объект $\left(R_P \cap_G R_Q\right) \cup_G \left(\overline{R_P} \cap_G \overline{R_Q}\right)$.

Рассмотрим возможности АК для решения задач исчисления высказываний.

Пример 10 [3]**.** При расследовании преступления стали известны следующие факты:

1. Если A виновен и B не виновен, то C виновен.

2. C никогда не действует в одиночку.

3. A никогда не ходит на дело вместе с C.

4. Никто, кроме A, B и C, в преступлении не замешан, и, по крайней мере, один из этой тройки виновен.

Можно ли на основе этих фактов найти хотя бы одного виновного? Выразим условия задачи на языке АК. Пусть A, B и C – атрибуты, при этом значение компоненты «1» означает «виновен», а «0» – не виновен. Тогда факты можно записать в виде АК-объектов таким образом:

1. Факт выражается формулой $(A \wedge \neg B) \supset C$. Для ее представления в виде АК-объекта используем Алгоритм 4. Тогда $P[AB] = [\{1\}\ \{0\}]$ и $Q[C] = [\{1\}]$. В результате получим

$]\{0\}\ \{1\}\ \varnothing[\ \cup\ ]\varnothing\ \varnothing\ \{1\}[\ =\ ]\{0\}\ \{1\}\ \{1\}[$.

2. Утверждается, что вариант $[\{0\}\ \{0\}\ \{1\}]$ исключается, тогда данный факт после вычисления дополнения выражается как D-кортеж $]\{1\}\ \{1\}\ \{0\}[$.

3. Утверждается, что вариант $[\{1\}\ *\ \{1\}]$ исключается, что эквивалентно D-кортежу $]\{0\}\ \varnothing\ \{0\}[$.

4. Данный факт выражается формулой $A \vee B \vee C$. Эта формула в АК соответствует D-кортежу $]\{1\}\ \{1\}\ \{1\}[$.

Система посылок выражается пересечением этих D-кортежей, т. е. D-системой: $R[ABC] = \left]\begin{matrix} \{0\} & \{1\} & \{1\} \\ \{1\} & \{1\} & \{0\} \\ \{0\} & \varnothing & \{0\} \\ \{1\} & \{1\} & \{1\} \end{matrix}\right[$.

Задача будет решена, если окажется, что хотя бы один атрибут в АК-объекте характеризуется значением «1», и нет ни одного элементарного кортежа, в котором этот атрибут имеет значение «0». Подходящие условия легко выявить, если преобразовать $R[ABC]$ в C-систему (Теорема 25 в Приложении 1). Тогда искомым атрибутом в C-системе будет тот, который в соответствующем столбце не содержит никаких других компонент, кроме $\{1\}$.

Чтобы уменьшить число операций при преобразовании $R[ABC]$ в C-систему, нужно попытаться сократить число D-кортежей в $R[ABC]$, используя Теорему 18 Приложения 1. При просмотре $R[ABC]$ можно выделить пары D-кортежей, которые заменяются одним D-кортежем. Одна из таких пар – это $]\{1\}\ \{1\}\ \{0\}[$ и $]\{1\}\ \{1\}\ \{1\}[$, вместо них можно вставить D-кортеж $]\{1\}\ \{1\}\ \varnothing[$. Тогда получим

$$R[ABC] = \left]\begin{matrix} \{0\} & \{1\} & \{1\} \\ \{1\} & \{1\} & \varnothing \\ \{0\} & \varnothing & \{0\} \end{matrix}\right[.$$

Еще одну возможность сокращения числа операций при преобразовании D-системы в C-систему дает метод ортогонализации [6, 7].

Ортогональной называется C-система, у которой любая пара C-кортежей не содержит общих элементарных кортежей, т. е. при их пересечении получается пустое множество. ***Ортогонализация*** – это метод преобразования АК-объекта в ортогональную C-систему.

Указанный метод используется в логико-вероятностном анализе на основе АК [6, 7], а также позволяет значительно сокращать число операций при преобразовании D-системы в C-систему. Чтобы его применить, нужно при преобразовании D-кортежей в диагональные C-системы записывать полученные C-системы как эквивалентные им ортогональные C-системы (см. Теорему 27 в Приложении 1). Для преобразования диагональной C-системы в ортогональную необходимо в диагональной C-системе в столбце под каждой нефиктивной компонентой записывать вместо «*» ее дополнение. Тогда получим.

1. $]\{0\}\ \{1\}\ \{1\}[$ преобразуется в $\begin{bmatrix} \{0\} & * & * \\ \{1\} & \{1\} & * \\ \{1\} & \{0\} & \{1\} \end{bmatrix}$;

2. $]\{1\}\ \{1\}\ \varnothing[$ преобразуется в $\begin{bmatrix} \{1\} & * & * \\ \{0\} & \{1\} & * \end{bmatrix}$;

3. $]\{0\}\ \varnothing\ \{0\}[$ преобразуется в $\begin{bmatrix} \{0\} & * & * \\ \{1\} & * & \{0\} \end{bmatrix}$;

4. $\begin{bmatrix} \{0\} & * & * \\ \{1\} & \{1\} & * \\ \{1\} & \{0\} & \{1\} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} \{1\} & * & * \\ \{0\} & \{1\} & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{0\} & \{1\} & * \\ \{1\} & \{1\} & * \\ \{1\} & \{0\} & \{1\} \end{bmatrix}$;

5. $\begin{bmatrix} \{0\} & \{1\} & * \\ \{1\} & \{1\} & * \\ \{1\} & \{0\} & \{1\} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} \{0\} & * & * \\ \{1\} & * & \{0\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{0\} & \{1\} & * \\ \{1\} & \{1\} & \{0\} \end{bmatrix}$.

В полученной C-системе условиям правильного решения соответствует только атрибут B, следовательно, B виновен. Относительно остальных подозреваемых нельзя сказать ничего определенного.

Пример 11. В книге Р. Смаллиана [20] имеется серия задач об обитателях острова, где живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путешественник попадает на этот остров и по высказываниям его обитателей пытается установить, кто из них лжец, а кто рыцарь. В одном из эпизодов путешественник встретил двух островитян A и B. Островитянин A сказал: «Мы оба лжецы». Кто на самом деле A и кто B?

Задачу можно решить с помощью рассуждений. Предположим, что A – рыцарь. Тогда его высказывание противоречит этому предположению, в силу чего A – лжец. Если он лжец, то высказывание «Мы оба лжецы» – ложное. Значит, истинным высказыванием будет то, которое не совпадает с этим, но при этом в нем должно быть указано, что A лжец. Таким высказыванием является «Я лжец, B – рыцарь».

Рассмотрим формальное решение задачи с помощью АК. Пусть $P[A] = [\{1\}]$ (A – рыцарь) и $Q[AB] = [\{0\}\ \{0\}]$ (высказывание островитянина A). Надо установить, при каких значениях переменных истинность этих высказываний будет одинаковой. Для этого воспользуемся Алгоритмом 5.

$([\{1\}\ *] \cap [\{0\}\ \{0\}]) \cup (]\{0\}\ \varnothing[\ \cap\ ]\{1\}\ \{1\}[)$.

Вычисление показывает, что левая часть выражения равна пустому множеству (пересечение C-кортежей пусто). Вычислим правую часть.

$$[\{0\}\ *] \cap \begin{bmatrix} \{1\} & * \\ \{0\} & \{1\} \end{bmatrix} = [\{0\}\ \{1\}].$$

Значит, ответ задачи: A – лжец, B – рыцарь.

5.2.2. Исчисление предикатов в алгебре кортежей

Начнем с одноместных предикатов. Предикат $P(x)$ в ИП интерпретируется как то, что некоторому подмножеству области изменения переменной x присвоено значение $\boldsymbol{T}$. В АК область истинности этого предиката есть некоторое подмножество P домена атрибута X. Отсюда понятно, что компоненты атрибутов можно рассматривать как области истинности одноместных предикатов.

Рассмотрим C-кортеж $P[XYZ] = [P_1\ P_2\ P_3]$. В исчислении предикатов C-кортежу соответствует ***конъюнкция*** одноместных предикатов с разными переменными. В частности, C-кортеж $P[XYZ]$ есть область истинности логической формулы

$H = P_1(x) \wedge P_2(y) \wedge P_3(z)$,

где предикатам $P_1(x), P_2(y), P_3(z)$ соответствуют области истинности P_1, P_2, P_3. Тогда множество всех выполняющих подстановок логической формулы H можно получить, вычислив ДП $P_1 \times P_2 \times P_3$. Отсюда нетрудно вывести, что область истинности формулы $\neg H = \neg P_1(x) \vee \neg P_2(y) \vee \neg P_3(z)$, есть D-кортеж $\overline{P} =]\ \overline{P_1}\ \ \overline{P_2}\ \ \overline{P_3}\ [$.

Любые АК-объекты можно рассматривать как области истинности соответствующих многоместных предикатов, а элементарные кортежи этих АК-объектов представляют выполняющие подстановки этих формул. Отсюда следует два важных утверждения:

1. АК-объект, равный универсуму, моделирует тавтологию.

2. АК-объект, равный пустому множеству, эквивалентен противоречию.

Далее покажем, каким образом представляются кванторы средствами АК.

Если в C-кортеж или в C-систему вводится фиктивный атрибут, такая процедура соответствует известному в исчислении предикатов правилу вывода, которое называется ***правилом обобщения*** (см. раздел 5.1.2). Например, если АК-объект

$$G[XZ] = \begin{bmatrix} \{a,c\} & * \\ \{a,c,d\} & \{b,c\} \end{bmatrix}$$

эквивалентен формуле $G(x, z)$ исчисления предикатов, то, добавив в этот АК-объект фиктивный атрибут Y, получим АК-объект

$$G_1[XYZ] = \begin{bmatrix} \{a,c\} & * & * \\ \{a,c,d\} & * & \{b,c\} \end{bmatrix},$$

который соответствует формуле $\forall yG(x, z)$, полученной из формулы $G(x, z)$ по правилу обобщения. Для C-кортежей и C-систем это соотношение очевидно, для D-кортежей и D-систем доказана соответствующая теорема (см. Теорему 28 в Приложении 1).

Таким образом, для любого АК-объекта имеет место следующее соотношение:

Теорема 30. Если логической формуле A, не содержащей свободной переменной x, соответствует AK-объект R, в схеме отношения которого отсутствует атрибут X, то AK-объект $+X(R)$ соответствует логической формуле $\forall x(A)$.

Иная картина получается, когда в АК выполняется элиминация атрибута. В логических исчислениях этой операции соответствует операция ***навешивания квантора***. Это означает, что к формуле A присоединяется квантор с переменной, свободной в A. Результат операции элиминации атрибута сильно зависит от типа изменяемого АК-объекта. Если это C-кортеж или C-система, то при элиминации атрибута образуется проекция этого АК-объекта, что утверждает

Теорема 31. Если C-кортеж или C-система $R[\ldots X\ldots]$ задают область истинности логической формулы $A(\ldots, x, \ldots)$ со свободной переменной x, то АК-объект $-X(R[\ldots X\ldots])$ – область истинности логической формулы $\exists x(A(\ldots, x, \ldots))$.

Рассмотрим пример. Пусть $Q[XYZ] = \begin{bmatrix} \{a,b,d\} & \{f,h\} & \{b\} \\ \{b,c\} & * & \{a,c\} \end{bmatrix}$ есть область истинности логической формулы $A(x, y, z)$. Тогда АК объект $-X\ (Q[XYZ]) = \begin{bmatrix} \{f,h\} & \{b\} \\ * & \{a,c\} \end{bmatrix}$ – область истинности формулы $\exists x A(x, y, z)$.

Рассмотрим, как изменяются результаты при элиминации атрибутов из D-кортежей и D-систем. Оказывается, тогда мы вычисляем не проекцию, а нечто другое. Покажем это на простом АК-объекте. Пусть задан D-кортеж $P[XYZ] =]\{a, c\}\ \{f, h\}\ \{c\}[$.

Тогда $-X(P[XYZ]) =]\{f, h\}\ \{c\}[= \begin{bmatrix} \{f,h\} & * \\ * & \{c\} \end{bmatrix}$.

Посмотрим, что получится при элиминации атрибута X из C-системы. Ясно, что $P[XYZ] = \begin{bmatrix} \{a,c\} & * & * \\ * & \{f,h\} & * \\ * & * & \{c\} \end{bmatrix}$. Если теперь выполнить элиминацию атрибута X, получим другой результат:

$$-X\ (P[XYZ]) = \begin{bmatrix} * & * \\ \{f,h\} & * \\ * & \{c\} \end{bmatrix} = [*\ \ *] \neq \begin{bmatrix} \{f,h\} & * \\ * & \{c\} \end{bmatrix}.$$

В [6] доказано, что при элиминации атрибута X из D-кортежа или D-системы P образуется АК-объект Q, который обладает следующим свойством:

$$+X(Q) \subseteq P. \qquad (2.3)$$

Рассмотрим на примере, что это означает. Пусть задана D-система $P[XYZ] = \left]\begin{matrix} \{c\} & \{g\} & \{a,c\} \\ \{a,d\} & \varnothing & \{b\} \end{matrix}\right[$. Вычислим

$$-X(P[XYZ]) = Q = \left]\begin{matrix} \{g\} & \{a,c\} \\ \varnothing & \{b\} \end{matrix}\right[$$

и преобразуем полученный результат в C-систему:

$$Q = \begin{bmatrix} \{g\} & * \\ * & \{a,c\} \end{bmatrix} \cap [*\ \{b\}] = [\{g\}\ \{b\}].$$

В соответствии с формулой (2.3) получим $[*\ \{g\}\ \{b\}] \subseteq P[XYZ]$.

Этот результат является примером более общей закономерности, доказанной в [6].

Теорема 32. Пусть $R[\ldots X\ldots]$ – D-кортеж или D-система, у которой отсутствуют D-кортежи с компонентами "*" в атрибуте X. Тогда для соответствующего этому АК-объекту предиката $P(\ldots, x, \ldots)$ формула $-X\ (R)$ соответствует формуле $\forall x(P)$.

Таким образом, если АК-объект $R[\ldots X\ldots]$ есть область истинности логической формулы $P(\ldots, x, \ldots)$, в которой переменная x свободна, то результат элиминации атрибута X из $R[\ldots X\ldots]$ зависит от того, к какому типу он относится:

- если $R[\ldots X\ldots]$ – C-кортеж или C-система, то $–X(R[\ldots X\ldots])$ – область истинности формулы $\exists xP(\ldots, x, \ldots)$;
- если $R[\ldots X\ldots]$ – D-кортеж или D-система, то $–X(R[\ldots X\ldots])$ – область истинности формулы $\forall xP(\ldots, x, \ldots)$.

5.2.3. Логический вывод в алгебре кортежей

Пусть задана система аксиом или посылок. Тогда в рамках логического вывода (или дедуктивного анализа) можно сформулировать две задачи:

1) ***Задача проверки правильности следствия***. Вместе с аксиомами задано предполагаемое следствие, и надо проверить, является ли оно следствием на самом деле.

2) ***Задача вывода следствий с заданными свойствами***. Здесь предполагаемое следствие не задано, но среди многих возможных следствий необходимо выбрать и проверить те, которые удовлетворяют заданным ограничениям.

В логических исчислениях и их приложениях задача 2 практически не исследуется. Здесь мы рассмотрим, как ее можно решить методами АК. Но сначала исследуем методы решения 1-й задачи.

В исчислениях для логического анализа рассуждений часто используются теорема дедукции. Обозначим знаком $\vdash$ термин «выводится» или «из … выводимо …». Например, если записано $A, B \vdash C$, то это означает «из A и B выводимо C» (в теории логического вывода посылки, разделенные запятыми, интерпретируются как конъюнкция этих посылок). Если знак $\vdash$ расположен перед формулой, то данная формула является теоремой. Теорема дедукции опубликована Ж. Эрбраном в 1930 году, и в [3] она сформулирована так:

Теорема дедукции. Если Γ – множество формул, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – формулы и Γ, $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$, то $\Gamma \vdash \mathcal{A} \supset \mathcal{B}$. В частности, если $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$, то $\vdash \mathcal{A} \supset \mathcal{B}$.

На практике часто используются следующие следствия из теоремы дедукции, которые приведены как теоремы в [19] (номера теорем те же, что и в цитируемой книге).

Теорема 2.1. Пусть даны формулы $F_1, ..., F_n$ и формула G. G есть логическое следствие $F_1, ..., F_n$ тогда и только тогда, когда формула $((F_1 \wedge ... \wedge F_n) \supset G)$ общезначима.

Теорема 2.2. Пусть даны формулы $F_1, ..., F_n$ и формула G. G есть логическое следствие $F_1, ..., F_n$ тогда и только тогда, когда формула $(F_1 \wedge ... \wedge F_n \wedge \neg G)$ противоречива.

В работах по математической логике теорема дедукции и Теоремы 2.1 и 2.2 предусматриваются только для исчисления высказываний. Предполагается, что для исчисления предикатов теорема дедукции верна не для всех случаев [3]. Но это неправильно, так как в качестве примера, подтверждающего некорректность этой теоремы в ИП приводится некорректное использование правила обобщения «из A выводимо $\forall xA$», когда оно применяется для произвольных логических формул (см. раздел 5.1.2). В случаях, когда A не общезначимая формула, и переменная x свободна в A, это правило ошибочно. Если правило обобщения использовать только для формул A, в которых отсутствует свободная переменная x (это соответствует отсутствию атрибута X в схеме отношения АК-объекта), то теорема дедукции и соответственно Теоремы 2.1 и 2.2 применимы в приложениях исчисления предикатов.

В [6] доказана следующая теорема.

Теорема 33. Если АК-объекты S_A и S_B – области истинности логических формул A и B, то общезначимость импликации $A \supset B$ равносильна истинности отношения $S_A \subseteq_G S_B$.

Теореме 2.2 из [19] соответствует следующая теорема в терминах АК.

Теорема 34. Пусть посылки рассуждения выражены АК-объектами $A_1, ..., A_n$ и задан АК-объект B. Тогда B есть следствие $A_1, ..., A_n$ тогда и только тогда, когда

$$A_1 \cap_G \ldots \cap_G A_n \cap_G \overline{B} = \varnothing.$$

Таким образом, Теорема 34 формулирует один из методов решения задачи проверки правильности следствия. Другой метод основан на Теореме 2.1 из [19] и Теореме 33.

Теорема 35. Пусть заданы посылки A_1, ..., A_n и предполагаемое следствие B, выраженные структурами АК. Тогда алгоритм проверки правильности следствия B для заданных посылок A_i заключается в вычислении обобщенных пересечений и проверке обобщенного включения:

$$(A_1 \cap_G \ \dots \cap_G A_n) \subseteq_G B. \tag{2.4}$$

Рассмотрим пример, иллюстрирующий решение первой задачи логического вывода.

Пример 12. Докажем справедливость одного из правил вывода в естественных рассуждениях, которое называется *правилом дилеммы*:

$A \supset C, B \supset C, A \vee B \vdash C.$

Чтобы применить аппарат АК, положим, что A, B и C – атрибуты, домены которых равны $\{0, 1\}$. Тогда посылки правила дилеммы можно выразить в виде D-системы

$$P[ABC] = \left]\begin{matrix} \{0\} & \varnothing & \{1\} \\ \varnothing & \{0\} & \{1\} \\ \{1\} & \{1\} & \varnothing \end{matrix}\right[.$$

Заключение правила выражается как C-кортеж $Q[C] = [\{1\}]$. Чтобы доказать справедливость правила методами АК, используем Теорему 35. В этом случае нужно проверить соотношение $P[ABC] \subseteq_G Q[C]$. Для этого требуется сначала преобразовать D-систему $P[ABC]$ в C-систему и затем проверить включение каждого ее C-кортежа в $Q[C]$.

Для преобразования $P[ABC]$ воспользуемся методами, изложенными в Примере 10. В итоге получим $P[ABC] = \begin{bmatrix} \{1\} & \{0\} & \{1\} \\ * & \{1\} & \{1\} \end{bmatrix}$.

Если использовать обобщенное включение $\subseteq_G$, то надо проверить соотношение $\begin{bmatrix} \{1\} & \{0\} & \{1\} \\ * & \{1\} & \{1\} \end{bmatrix} \subseteq [* * \{1\}]$.

С помощью Теоремы 1 можно убедиться, что каждый C-кортеж левой части включен в C-кортеж $[* * \{1\}]$, что и доказывает справедливость правила дилеммы.

В исчислениях высказываний и предикатов не оговорен случай, когда конъюнкция посылок A_i оказывается противоречивой формулой. На самом деле такой случай есть один из примеров некорректности рассуждений, математическая формулировка правила Дунса Скота «Из лжи можно вывести все, что угодно». В АК эта некорректность выражается равенством $(A_1 \cap_G \dots \cap_G A_n) = \varnothing$ для посылок из формулы (2.4).

Из соотношения (2.4) следуют непривычные для традиционной теории логического вывода утверждения. Рассмотрим два случая.

Первый случай. *Для заданного набора посылок можно вычислить* ***минимальное следствие***. Это результат обобщенного пересечения посылок: $A = A_1 \cap_G \dots \cap_G A_n$. Минимальное оно потому, что любое строгое подмножество A перестает быть следствием. Понятие минимального следствия позволяет в системах с конечными областями значений переменных вычислить число всех возможных следствий [7]. Предположим, что система посылок A_i, выраженных АК-объектами, задана в пространстве атрибутов $X_1, X_2, \dots, X_k$ с конечным числом значений в каждом. Используя метрические свойства АК, основанные на метрических свойствах декартовых произведений, можно рассчитать число элементов (элементарных кортежей) $|\boldsymbol{U}|$ в универсуме $\boldsymbol{U} = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k$ и в АК-объекте A, полученном как результат обобщенного пересечения посылок A_i [6, 7].

Теорема 36. Пусть $\boldsymbol{U} = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k$ – универсум, в котором все атрибуты имеют конечное множество значений, и в этом универсуме заданы выраженные АК-объектами посылки $A_1, \dots, A_n$. Тогда число возможных следствий из посылок A_i равно 2^N, где $N = |\boldsymbol{U}| - |A|$, а $A = A_1 \cap_G \dots \cap_G A_n$.

Доказательство. Из (2.4) ясно, что любой АК-объект $B = A \cup S$, где S – произвольное подмножество множества элементарных кортежей в $\boldsymbol{U} \setminus A$, есть следствие множества посылок A_i. Значит, общее число следствий в точности равно числу всех подмножеств множества $\boldsymbol{U} \setminus A$. Из равенства $|\boldsymbol{U} \setminus A| = |\boldsymbol{U}| - |A|$ следует справедливость утверждения. *Конец доказательства*.

Второй случай. *Корректные следствия могут нарушать заданные в посылках ограничения*. В прикладных задачах логического анализа, где аксиомы не общезначимы, некоторые посылки могут исполнять роль ограничений, выход за их пределы оценивается как некорректность в рассуждениях или как нарушение правил нормального функционировании исследуемого объекта. Примером может служить часто используемое ограничение Alldiff [21], которое требует, чтобы в решении все участвующие в задаче переменные имели разные значения. Это ограничение применяется в некоторых из приведенных здесь задач.

Соотношение (2.4) позволяет убедиться в том, что основанные на теореме дедукции правила логического вывода позволяют выходить за пределы этих ограничений. Пусть в (2.4) $A = A_1 \cap_G \ldots \cap_G A_n$. Предположим, посылка A_k задает ограничение, причем $\overline{A_k} \neq \varnothing$. Ясно, что $A \subseteq A_k$, однако следствием данных посылок может быть АК-объект $A \cup_G S$ при условии, что $S \cap_G \overline{A_k} \neq \varnothing$. Значит, для данной системы существует АК-объект, который является следствием посылок, но при этом нарушает заданное ограничение.

Рассмотрим задачу поиска следствий с некоторыми заранее заданными свойствами. Теорема 36 показывает, что число возможных следствий может быть весьма большим, при этом многие следствия не представляют интереса. Например, к формальным следствиям относится универсум задачи, ничего не дающий с точки зрения получения полезной информации. С другой стороны, далеко не всегда известно, какие утверждения надо проверить, чтобы узнать, следуют ли они из заданной системы посылок. Поэтому определенный интерес представляет рассмотренное выше минимальное следствие, но иногда требуется определить возможные следствия из заданных посылок с учетом определенных ограничений. Эта задача в исчислениях практически не рассматривается.

При поиске вариантов возможного следствия обычно исходят из следующих предпосылок:

1) в следствии желательно использовать лишь небольшую часть всех переменных рассуждения;

2) состав переменных в искомом следствии нередко определяется, исходя из смыслового анализа конкретной системы рассуждений.

Применение правил вывода в качестве механизма получения следствий при заданных ограничениях часто требует перебора большого числа вариантов, так как заранее невозможно предсказать порядок и результат применения правил. При использовании методов АК задача существенно упрощается. Когда задано множество АК-объектов $\{A_1, \ldots, A_n\}$, представляющих аксиомы (или посылки), то можно найти АК-объект $A = A_1 \cap_G \ldots \cap_G A_n$. Тогда для получения любого следствия достаточно построить АК-объект B_i такой, чтобы выполнялось соотношение $A \subseteq_G B_i$.

Количество переменных в B_i можно сократить с помощью вычисления проекций A. Очевидно, при таком преобразовании образуется АК-объект B_i, для которого соотношение $A \subseteq_G B_i$ будет выполняться. В результате элиминации атрибутов из C-системы получается проекция, чьи свойства определяют дальнейшие действия по выводу следствий.

Проекции могут быть ***полными***, т. е. содержащими все элементарные кортежи для их схем отношения, и ***неполными*** в противном случае. Если проекция полная, следствие из нее будет тавтологией и интереса не представляет. Поэтому следует учитывать только неполные проекции.

Продемонстрируем, как осуществляется поиск следствий с ограничениями для Примера 12. В C-системе $P[ABC] = \begin{bmatrix} \{1\} & \{0\} & \{1\} \\ * & \{1\} & \{1\} \end{bmatrix}$ проекции $[A]$ и $[B]$ полные, так как содержат все возможные значения атрибутов. Несложно проверить, что остальные проекции, т. е. $[C]$, $[AB]$, $[AC]$ и $[BC]$ – неполные. Для первой проекции получим $Q_1[C] = \begin{bmatrix} \{1\} \\ \{1\} \end{bmatrix} = [\{1\}]$, что соответствует логической формуле C. Проекция $[AC]$ дает результат $Q_2[AC] = \begin{bmatrix} \{1\} & \{1\} \\ * & \{1\} \end{bmatrix} = [*\ \{1\}]$, совпадающий с предыдущим, так как атрибут A – фиктивный. То же самое получаем и для проекции $[BC]$. Проекция $[AB]$ дает $Q_3[AB] = \begin{bmatrix} \{1\} & \{0\} \\ * & \{1\} \end{bmatrix}$, что эквивалентно формуле $A \vee B$, т. е. одной их посылок.

Если в C-системах поиск следствий с заданными ограничениями выполняется с помощью элиминации атрибутов, то в D-кортежах и D-системах элиминация атрибутов вызывает обратный эффект, так как получаются АК-объекты, удовлетворяющие соотношению $-X(A) \subseteq A$. Но в D-системах есть другой простой способ получения АК-объектов, содержащих A в качестве подмножества. Для этого достаточно удалить некоторые строки D-системы. Результат такого действия трудно предсказать заранее, но при удалении строк получится D-система, которую проще преобразовать в C-систему.

Алгоритм вывода следствий с сокращенной схемой отношения в АК

1) вычислить минимальное следствие A;

2) если A – C-система, то найти в ней неполные проекции, каждую из них можно выбрать в качестве следствия;

3) если A – D-система, то *a*) преобразовать ее в C-систему и выполнить шаг 2 или *b*) удалить из A некоторые D-кортежи, после чего преобразовать ее в C-систему и выполнить шаг 2.

5.2.4. Пересматриваемые рассуждения

Полноценный логический анализ включает в себя не только ***дедукцию*** (логический вывод), но и недедуктивные методы анализа (***пересматриваемые рассуждения***, анализ неопределенностей и противоречивости, формирование гипотез, абдуктивных заключений и т. д.) Теория логического вывода уже несколько десятилетий считается завершенной, чего нельзя сказать о теориях пересматриваемых рассуждений. Многие специалисты придерживаются точки зрения, согласно которой для анализа пересматриваемых рассуждений более предпочтительны неклассические логики (логика умолчаний, немонотонная логика и т. д.) [21].

Один из возможных доводов в пользу применения неклассических логик для анализа пересматриваемых рассуждений состоит в том, что в классической теории логического вывода единственным критерием некорректности служит формальное противоречие, когда из посылок выводимо некоторое следствие и его отрицание. В то же время в повседневной практике рассуждений известны и часто применяются другие критерии некорректности. В основном они относятся к семантике рассуждений (искажение смысла, несоответствие выводимых следствий бесспорным фактам и т. д.). Ниже предлагается выявлять подобные некорректности не с помощью неклассических логик, а путем формулировки и проверки заданных ограничений, при условии, что анализ таких несоответствий основан на законах классической логики, в частности, на законах алгебры множеств.

Рассмотрим пример, когда парадокс не является формальным противоречием. Даны посылки:

a) «Все страусы летают»;

b) «Все страусы не летают».

Здесь нет формального противоречия, поскольку формальное отрицание первого утверждения – это высказывание "Существуют страусы, которые не летают". В то же время анализ показывает, что из заданных посылок выводится утверждение о том, что страусов не существует. Но действительно ли для анализа ситуаций такого рода следует использовать неклассическую логику? По мнению автора, предпочтительнее проверять систему рассуждений не на формальную противоречивость, а анализировать с точки зрения нарушения тех или иных семантических ограничений. В частности, для данного примера семантическая некорректность рассуждения очевидна, поскольку существование страусов не подлежит сомнению.

Если в рассуждение о страусах ввести посылку о существовании страусов, то получим формальное противоречие. Обозначим C – страус, $Л$ – летает. Тогда исходные посылки выражаются импликациями ($C \supset Л$ и $C \supset \neg Л$) и, соответственно, АК-объектами

$P_1[CЛ] =]\{0\}\ \{1\}[$; $P_2[CЛ] =]\{0\}\ \{0\}[$.

Вычислим пересечение посылок

$$P_1[CЛ] \cap P_2[CЛ] = \begin{bmatrix} \{0\} & * \\ \{1\} & \{1\} \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} \{0\} & * \\ \{1\} & \{0\} \end{bmatrix} = [\{0\}\ *].$$

Утверждение о существовании страусов можно выразить как посылку $P_3[C] = [\{1\}]$. Нетрудно убедиться, что результатом обобщенного пересечения трех посылок будет пустой АК-объект.

В первой части (Полисиллогистика) излагались методы анализа коллизий. Их тоже можно рассматривать как методы распознавания и анализа ограничений. Так, коллизию парадокса возникает при нарушении ограничения «данный объект существует», а коллизия цикла – при нарушении ограничения «равенство данных объектов не имеет смысла». Такого рода коллизии возможны не только в полисиллогистике. Рассмотрим пример распознавания коллизии парадокса в структурах АК.

Пример 13. В закрытом ящике находятся предметы, описываемые формой (шар или куб), цветом (белый или красный) и материалом (пластмасса или дерево) Необходимо определить, какие типы предметов могут находиться в ящике, если известно: 1) все шары красного цвета; 2) все деревянные предметы окрашены в белый цвет; 3) все пластмассовые предметы не относятся к шарам.

Обозначим S – шары, W – белые; P – пластмассовые предметы. Если решать эту задачу с помощью E-структур, легко обнаруживается коллизия парадокса (раздел 6 первой части):

посылки: $S \subseteq \overline{W}$, $\overline{P} \subseteq W$, $P \subseteq \overline{S}$;

следствия: $\overline{W} \subseteq P$, $S \subseteq P$, $S \subseteq \overline{S}$.

Чтобы решить данную задачу в структурах АК, запишем условия задачи на языке исчисления высказываний:

$S \supset \neg W$, $\neg P \supset W$, $P \supset \neg S$.

Эти посылки можно выразить как D-систему:

$$P[SWP] = \left]\begin{matrix} \{0\} & \{0\} & \varnothing \\ \varnothing & \{1\} & \{1\} \\ \{0\} & \varnothing & \{0\} \end{matrix}\right[.$$

После преобразования $P[SWP]$ в C-систему получим:

$$P[SWP] = \begin{bmatrix} \{0\} & \{1\} & * \\ \{0\} & \{0\} & \{1\} \end{bmatrix}.$$

Здесь первый столбец содержит только одноэлементную компоненту {0}. Это и есть признак коллизии парадокса. Действительно, выражению $(S \supset \overline{S}) = (\overline{S} \vee \overline{S}) = \overline{S}$ в АК сопоставляется C-кортеж [{0} * *], который входит в следствия $P[SWP]$, поэтому коллизия $S \supset \overline{S}$ – следствие системы посылок.

В данном примере, где нет ограничения «в ящике обязательно должны быть шары», коллизия парадокса означает, что в ящике нет шаров, а все предметы имеют форму куба.

Использование ограничений позволяет дать формальное определение гипотез в терминах АК. Пусть задана система посылок $A_1, \ldots, A_n$, представленных АК-объектами, и вычислен АК-объект $A = A_1 \cap_G \ldots \cap_G A_n$.

Определение 19. ***Гипотезой*** называется АК-объект H, для которого условие $A \subseteq_G H$ не выполняется (в противном случае в соответствии с (2.4) H есть следствие).

Определение 20. ***Корректной гипотезой*** называется АК-объект H при условиях:

(*a*) H – гипотеза;

(*b*) $A \cap_G H \neq \varnothing$ (новая система посылок непротиворечива);

(*c*) при добавлении H в систему посылок не нарушаются ограничения.

Рассмотрим пример.

Пример 14. В разделе 3 приводилась задача из серии задач об узнике, который мог получить свободу, если угадает, в какой комнате находится принцесса [17]. Предлагаемой ниже задачи в книге Р. Смаллиана нет, но ситуация аналогичная.

Перед узником три комнаты. В одной из них – тигр, в другой – принцесса, а третья пуста. Даны две подсказки: одна из них истинная, другая ложная, но какая именно – неизвестно.

Подсказка 1: во второй комнате нет тигра, а третья – не пуста.

Подсказка 2: первая комната не пуста, а во второй нет тигра.

Будем считать, что ограничение нарушается, когда в разных комнатах оказывается одинаковое содержимое (например, тигры находятся в первой и третьей комнатах) – ограничение Alldiff.

Введем обозначения: P – в комнате принцесса; T – в комнате тигр; E – комната пуста. В качестве атрибутов используются номера комнат: N_1, N_2 и N_3. Выразим подсказки в виде C-кортежей.

$M_1[N_2N_3] = [\{P, E\}\ \{P, T\}]$; $M_2[N_1N_2] = [\{P, T\}\ \{P, E\}]$.

Для решения задачи достаточно исследовать две гипотезы:

Гипотеза 1: M_1 – истинно; M_2 – ложно;

Гипотеза 2: M_1 – ложно; M_2 – истинно.

Рассмотрим первую из них. Ее можно описать следующими выражениями:

$$\overline{M_2} =]\{E\}\ \{T\}\ \varnothing[= \begin{bmatrix} \{E\} & * & * \\ * & \{T\} & * \end{bmatrix}.$$

$$M_1 \cap \overline{M_2} = [*\ \{P, E\}\ \{P, T\}] \cap \begin{bmatrix} \{E\} & * & * \\ * & \{T\} & * \end{bmatrix} =$$

$$= [\{E\}\ \{P, E\}\ \{P, T\}].$$

Если вычислить декартово произведение $\{E\} \times \{P, E\} \times \{P, T\}$, увидим, что из четырех полученных элементарных кортежей только один – (E, P, T) – не нарушает ограничения Alldiff. Следовательно, принцесса во второй комнате.

Теперь проверим вторую гипотезу.

$$\overline{M_1} =]\varnothing\ \{T\}\ \{E\}[= \begin{bmatrix} * & \{T\} & * \\ * & * & \{E\} \end{bmatrix}.$$

$$\overline{M_1} \cap M_2 = \begin{bmatrix} * & \{T\} & * \\ * & * & \{E\} \end{bmatrix} \cap [\{P, T\}\ \{P, E\}\ *] =$$

$$= [\{P, T\}\ \{P, E\}\ \{E\}].$$

Здесь условиям задачи удовлетворяет элементарный кортеж (T, P, E), который отличается от полученного ранее, но оставляет неизменным местонахождение принцессы. Таким образом, обе гипотезы приводят к одному результату: принцесса во второй комнате.

Рассмотрим, как в АК можно моделировать абдуктивное заключение. Классический пример абдукции – открытие нейтрино. Предполагалось, что одним из результатов эксперимента, связанного с изучением бета-распада, будет выполнение закона сохранения энергии. Однако расчеты показали, что при бета-распаде этот закон не соблюдается. Чтобы «спасти» этот закон, физик В. Паули в 1930 году предложил гипотезу о существовании некоторых "невидимых" частиц, которые образуются в ходе бета-распада и забирают часть энергии. В 1932 году Э. Ферми назвал эту частицу "нейтрино". Экспериментально реальность нейтрино (точнее, его двойника – антинейтрино) подтвердили лишь в 1953 году.

Дадим формальное определение абдукции. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ – посылки, выраженные в виде АК-объектов, из них предположительно должно следовать утверждение B, однако после вычисления $A = A_1 \cap_G \ldots \cap_G A_n$ выяснилось, что соотношение $A \subseteq_G B$ не подтверждается.

Определение 21. Абдуктивное заключение – это АК-объект H при условиях:

1) H – корректная гипотеза;

2) $(H \cap_G A) \subseteq_G B$ (т. е. при добавлении H в систему посылок предполагаемое следствие B становится выводимым).

Допустим, выяснено, что предполагаемое следствие не выводится из посылок. Для анализа используем диаграммы Эйлера. Когда B не подтверждается как следствие A, т. е. не верно, что $A \subseteq_G B$, возможны два варианта: пересечение этих множеств не пусто (рис. 4) или они не пересекаются (рис. 5). Обозначим закрашенную часть A, равную $A \setminus_G B$, как R (выражение с обобщенной операцией разности $\setminus_G$ эквивалентно выражению $A \cap_G \overline{B}$).

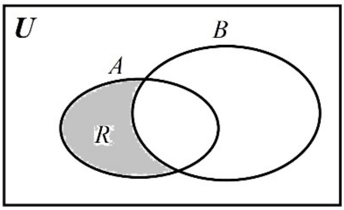


Рис. 4

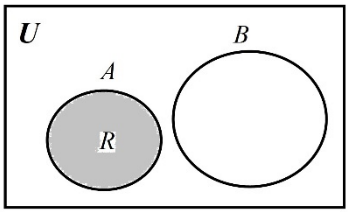


Рис. 5

Вариант на рис. 5 – вырожденный. Здесь добавление любых посылок не поможет. При непустом пересечении A и B (рис. 4) для вычисления абдуктивного заключения (гипотезы) H необходимо учесть, что $A \cap_G B$ есть минимальное следствие, и никакая часть области R не должна присутствовать в H.

С учетом сказанного сформируем следующий

Алгоритм поиска абдуктивных заключений:

1. Вычислить «остаток» $R = A \setminus_G B$.

2. Построить промежуточный объект R_i такой, чтобы соблюдалось $R \subseteq_G R_i$;

3. Вычислить гипотезу $H = \overline{R_i}$;.

4. Проверить корректность H. При успешной проверке H – абдуктивное заключение.

На Шаге 2 при построении промежуточного объекта R_i можно использовать методы построения следствий с сокращенной схемой отношения. На Шаге 4 нужно учесть, что даже если ограничения не заданы, необходимо проверить обязательное условие корректности гипотезы: выполнение соотношения $A \cap_G H \neq \varnothing$. При выполнении Шага 2 возможна ситуация, когда $A \subseteq_G R_i$, что влечет соотношение $A \cap_G H = \varnothing$, т. е. вырождение посылок. Рассмотрим пример.

Пример 15 [3]. Проверить правильность логического вывода для следующего рассуждения: "Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью, и убийство имело место после полуночи. Если убийство имело место после полуночи, то либо Смит убийца, либо Джонс лжет. Следовательно, Смит – убийца".

Выразим данное рассуждение на языке ИВ. Обозначим: B – Джонс встречал этой ночью Смита; C – Смит был убийцей; D – Джонс лжет; E – убийство имело место после полуночи. При формализации предложений нужно учесть, что выражение «либо A, либо B» переводится на язык ИВ как формула $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$. Тогда после преобразования каждого из предложений в ДНФ получим такие посылки:

- для первого предложения: $B \vee (C \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge D)$;
- для второго предложения: $C \vee (\neg B \wedge E)$;
- для третьего предложения: $\neg E \vee (C \wedge \neg D) \vee (\neg C \wedge D)$;
- для следствия: C.

Чтобы представить эти формулы АК-объектами, используем схему отношения $[BCDE]$. Тогда посылки выражаются C-системами:

$$A_1[BCD] = \begin{bmatrix} \{1\} & * & * \\ * & \{1\} & \{0\} \\ * & \{0\} & \{1\} \end{bmatrix}; A_2[BCE] = \begin{bmatrix} * & \{1\} & * \\ \{0\} & * & \{1\} \end{bmatrix};$$

$$A_3[CDE] = \begin{bmatrix} * & * & \{0\} \\ \{1\} & \{0\} & * \\ \{0\} & \{1\} & * \end{bmatrix},$$

а следствие – C-кортежем $S[C] = [\{1\}]$ или $S[BCDE] = [* \ \{1\} \ * \ *]$.

Решить задачу можно двумя способами:

1) проверить соотношение $(A_1 \cap_G A_2 \cap_G A_3) \subseteq_G S$;

2) проверить пустоту АК-объекта $A_1 \cap_G A_2 \cap_G A_3 \cap_G \overline{S}$.

Пусть $A = A_1 \cap_G A_2 \cap_G A_3$. Если не подтвердится $A \subseteq_G S$ или результат пересечения $A \cap_G \overline{S}$ окажется пустым, то предполагаемое следствие не подтвердится.

Вычислим $R = A_1 \cap_G A_2 \cap_G A_3$. Для этого воспользуемся Теоремой 8 (пересечение C-систем) и Теоремой 5 (условия объединения C-кортежей). В результате получим

$$A[BCDE] = \begin{bmatrix} \{1\} & \{1\} & * & \{0\} \\ * & \{1\} & \{0\} & * \\ \{0\} & \{0\} & \{1\} & \{1\} \end{bmatrix}.$$

Проверим включение $A \subseteq_G S$, для чего используем Теорему 1 для каждого C-кортежа C-системы A. Получаем, что C-кортеж $[\{0\} \ \{0\} \ \{1\} \ \{1\}]$ не включен в S. Таким образом, проверка показывает, что предполагаемое следствие (Смит был убийцей) не выводимо.

Воспользуемся вторым способом проверки, заодно вычислим «остаток» R.

$$R = A \cap_G \overline{S} = \begin{bmatrix} \{1\} & \{1\} & * & \{0\} \\ * & \{1\} & \{0\} & * \\ \{0\} & \{0\} & \{1\} & \{1\} \end{bmatrix} \cap [* \ \{0\} \ * \ *] = [\{0\} \ \{0\} \ \{1\} \ \{1\}].$$

Решим теперь нестандартную задачу. Виновность Смита не доказана, но можно ли на основе условий задачи найти факты, проверка которых может подтвердить виновность Смита. По сути, надо найти абдуктивное заключение. Используем приведенный выше алгоритм с учетом того, что первый шаг уже выполнен.

1. $R = A \cap_G \overline{S} = [\{0\} \ \{0\} \ \{1\} \ \{1\}]$.

2. На этом шаге можно выбрать в качестве R_i любую проекцию R. Пусть это будет $R[E]$. Тогда получим $R_i = [* \ * \ * \ \{1\}]$.

3. $H_i = \overline{R_i} = [* \ * \ * \ \{0\}]$ (т. е. убийство произошло до полуночи).

4. Проверим корректность гипотезы, т. е. убедимся, что новое минимальное следствие не пусто и виновность Смита подтверждается.

$$A \cap_G H_i = \begin{bmatrix} \{1\} & \{1\} & * & \{0\} \\ * & \{1\} & \{0\} & * \\ \{0\} & \{0\} & \{1\} & \{1\} \end{bmatrix} \cap_G [* * * \{0\}] = \begin{bmatrix} \{1\} & \{1\} & * & \{0\} \\ * & \{1\} & \{0\} & \{0\} \end{bmatrix}.$$

Проверка подтверждает корректность гипотезы «Убийство произошло до полуночи». Отсюда следует, что вывод будет правильным, если после уточнения времени убийства окажется, что оно соответствует гипотезе.

Заключение

В данном разделе излагается сравнительно новый математический аппарат – алгебра кортежей. В рамках дедуктивного анализа рассмотрена новая задача: вывод следствий с заранее заданными свойствами. Показаны возможности этой алгебры для решения задач логического анализа, в состав которых входят не только дедукция, но также моделирование и анализ пересматриваемых рассуждений без нарушения законов классической логики.

Приложение 1

Сводка теорем Алгебры Кортежей

(теоремы распределены по темам, номера теорем с 1 по 13 соответствует номерам теорем с доказательствами в тексте Части II)

1) пересечение АК-объектов

Теорема 2 (пересечение однотипных C-кортежей). Пусть даны два однотипных C-кортежа $P = [P_1\ P_2\ \ldots\ P_N]$ и $Q = [Q_1\ Q_2\ \ldots\ Q_N]$. Тогда

$P \cap Q = [P_1 \cap Q_1\ P_2 \cap Q_2\ \ldots\ P_N \cap Q_N]$.

Теорема 3 (пустое пересечение однотипных C-кортежей). Пусть даны два однотипных C-кортежа $P = [P_1\ P_2\ \ldots\ P_N]$ и $Q = [Q_1\ Q_2\ \ldots\ Q_N]$, и в них имеется, по крайней мере, одна пара P_i и Q_i компонент, для которых $P_i \cap Q_i = \varnothing$. Тогда $P \cap Q = \varnothing$.

Теорема 7 (пересечение C-кортежа и C-системы). Пусть даны однотипные C-кортеж P и C-система Q. Результатом их пересечения будет C-система, содержащая все непустые пересечения C-кортежа P с каждым C-кортежем из Q.

Теорема 8 (пересечение двух C-систем). Пусть даны однотипные C-системы P и Q. Результатом их пересечения будет C-система, содержащая все непустые пересечения каждого C-кортежа из P с каждым C-кортежем из Q.

Теорема 16 (пересечение однотипных D-кортежей). Пусть даны два однотипных D-кортежа $P =]P_1\ P_2\ \ldots\ P_N[$ и $Q =]Q_1\ Q_2\ \ldots\ Q_N[$. Тогда

$]P_1 \cap Q_1\ P_2 \cap Q_2\ \ldots\ P_N \cap Q_N[\ \subseteq P \cap Q$.

Теорема 18. Для однотипных D-кортежей $P =]P_1\ P_2\ \ldots\ P_N[$ и $Q =]Q_1\ Q_2\ \ldots\ Q_N[$ равенство $P \cap Q =]P_1 \cap Q_1\ P_2 \cap Q_2\ P_N \cap Q_N[$ соблюдается в следующих двух случаях:

1) $P \subseteq Q$ или $Q \subseteq P$;

2) для всех пар P_i и Q_i, за исключением одной пары, имеет место $P_i = Q_i$.

Теорема 19 (пересечение D-систем)**.** Пересечение однотипных D-систем равно D-системе, строки которой – все D-кортежи исходных D-систем.

2) объединение АК-объектов

Теорема 4 (объединение однотипных C-кортежей). Пусть даны два однотипных C-кортежа $P = [P_1\ P_2\ \ldots\ P_N]$ и $Q = [Q_1\ Q_2\ \ldots\ Q_N]$. Тогда

$P \cup Q \subseteq [P_1 \cup Q_1\ P_2 \cup Q_2\ P_N \cup Q_N]$.

Теорема 5. Для однотипных C-кортежей $P = [P_1\ P_2\ \ldots\ P_N]$ и $Q = [Q_1\ Q_2\ \ldots\ Q_N]$ равенство $P \cup Q = [P_1 \cup Q_1\ P_2 \cup Q_2\ \ldots\ P_N \cup Q_N]$ соблюдается в следующих двух случаях:

1) $P \subseteq Q$ или $Q \subseteq P$;

2) для всех пар P_i и Q_i выполняется $P_i = Q_i$, за исключением одной пары.

Теорема 6 (объединение C-систем). Объединение однотипных C-систем есть C-система, в которую включены все C-кортежи объединяемых C-систем.

Теорема 14 (объединение однотипных D-кортежей). Пусть даны два однотипных D-кортежа $P =]P_1\ P_2\ \ldots\ P_N[$ и $Q =]Q_1\ Q_2\ \ldots\ Q_N[$. Тогда

$P \cup Q =]P_1 \cup Q_1\ P_2 \cup Q_2\ \ldots\ P_N \cup Q_N[$.

Теорема 15 (равное универсуму объединение однотипных D-кортежей). Пусть даны два однотипных D-кортежа $P =]P_1\ P_2\ \ldots\ P_N[$ и $Q =]Q_1\ Q_2\ \ldots\ Q_N[$, и существует, по крайней мере, одна пара P_i и Q_i компонент, для которых $P_i \cup Q_i = *$. Тогда $P \cup Q$ равно универсуму.

3) дополнение АК-объектов

Теорема 9. Дополнение C-кортежа $P = [P_1\ P_2\ ...\ P_{n\text{-}1}\ P_n]$ есть диагональная C-система $R = \begin{bmatrix} \overline{P_1} & * & \ldots & * \\ * & \overline{P_2} & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ * & * & \ldots & \overline{P_n} \end{bmatrix}$ размерности $n \times n$, где каждая диагональная компонента – дополнение соответствующей компоненты C-кортежа P.

Теорема 10. Дополнение C-кортежа $P = [P_1\ P_2\ ...\ P_n]$ равно D-кортежу $]\,\overline{P_1}\ \ \overline{P_2}\ \ ...\ \ \overline{P_n}\,[$, а дополнение D-кортежа $Q =]Q_1\ Q_2\ ...\ Q_n[$ есть C-кортеж $[\,\overline{Q_1}\ \ \overline{Q_2}\ \ ...\ \ \overline{Q_n}\,]$.

Теорема 11. Дополнение C-системы есть D-система той же размерности, все компоненты которой равны дополнениям соответствующих компонент исходной C-системы.

Теорема 12. Дополнением D-системы есть C-система той же размерности, все компоненты которой равны дополнениям соответствующих компонент исходной D-системы.

Теорема 13. Дополнение C-кортежа $P = [*\ \ *\ \ldots\ P_i\ \ldots\ \ *]$ с единственной (i-ой) нефиктивной компонентой равно C-кортежу

$$P_C = [*\ \ *\ \ldots\ \ \overline{P_i}\ \ \ldots\ \ *].$$

4) проверка включения АК-объектов

Теорема 1 (проверка включения однотипных C-кортежей). Пусть даны два однотипных C-кортежа $P = [P_1\ P_2\ \ldots\ P_N]$ и $Q = [Q_1\ Q_2\ \ldots\ Q_N]$. Тогда $P \subseteq Q$, если и только если $P_i \subseteq Q_i$ верно для всех соответствующих пар компонент сравниваемых C-кортежей.

Теорема 17 (проверка включения однотипных D-кортежей). Пусть даны два однотипных D-кортежа $P =]P_1\ P_2\ \ldots\ P_n[$ и $Q =]Q_1\ Q_2\ \ldots\ Q_n[$. Тогда $P \subseteq Q$, если и только если соблюдается $P_i \subseteq Q_i$ для всех соответствующих пар компонент сравниваемых D-кортежей.

Теорема 20 (проверка включения однотипных C-кортежа в D-кортеж). Для C-кортежа $P = [P_1\ P_2\ ...\ P_n]$ и D-кортежа $Q =]Q_1\ Q_2\ ...\ Q_n[$ справедливо $P \subseteq Q,$ если и только если по крайней мере для одного i соблюдается $P_i \subseteq Q_i$.

Теорема 21 (проверка включения однотипных C-кортежа в D-систему). Для C-кортежа P и D-системы Q справедливо $P \subseteq Q,$ если и только если для каждого D-кортежа Q_j из Q выполняется $P \subseteq Q_j$.

Теорема 22 (проверка включения однотипных C-системы в D-систему). Для C-системы P и D-системы Q справедливо $P \subseteq Q$, если и только если каждый C-кортеж из P включен в каждый D-кортеж из Q.

5) преобразования АК-объектов в другие типы

В АК отсутствуют алгоритмы, с помощью которых можно прямо выполнять операции пересечения или объединения C-кортежей или C-систем с D-кортежами или D-системами. Для выполнения этих операций необходимо преобразовать один из АК-объектов в другой тип (например, D-кортеж или D-систему в C-систему или, наоборот, C-кортеж или C-систему в D-систему). Во многих случаях, когда преобразуемые C-системы или D-системы имеют большую размерность, алгоритмы оказываются весьма трудоемкими, т. е. требуют больших вычислительных ресурсов. В литературе по АК излагаются методы уменьшения этой трудоемкости. Некоторые из них приведены в разделе 5.2.1, Пример 10.

Теорема 23 (преобразование D-кортежа в C-систему). Каждый D-кортеж $P =]P_1\ P_2 \ldots P_n[$ эквивалентен диагональной C-системе

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & * & \ldots & * \\ * & P_2 & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ * & * & \ldots & P_n \end{bmatrix}.$$

Теорема 24 (преобразование C-кортежа в D-систему). Каждый C-кортеж $P = [P_1\ P_2 \ldots P_n]$ эквивалентен диагональной D-системе

$$P = \left]\begin{matrix} P_1 & \varnothing & \ldots & \varnothing \\ \varnothing & P_2 & \ldots & \varnothing \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varnothing & \varnothing & \ldots & P_n \end{matrix}\right[.$$

Теорема 25 (преобразование D-системы в C-систему). D-система P, содержащая m D-кортежей, эквивалентна C-системе, которая является пересечением m C-систем, полученных с помощью преобразования каждого D-кортежа из P в диагональную C-систему.

Теорема 26 (преобразование C-системы в D-систему). C-система P, содержащая m C-кортежей, эквивалентна D-системе, которая является объединением m D-систем, полученных с помощью преобразования каждого C-кортежа из P в диагональную D-систему.

Теорема 27. D-кортеж вида $]Q_1\ Q_2\ ...\ Q_{m\text{-}1}\ Q_m[$ преобразуется в эквивалентную ему ортогональную C-систему:

$$\begin{bmatrix} Q_1 & * & \dots & * & * \\ \overline{Q_1} & Q_2 & \dots & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{Q_1} & \overline{Q_2} & \dots & Q_{m-1} & * \\ \overline{Q_1} & \overline{Q_2} & \dots & \overline{Q_{m-1}} & Q_m \end{bmatrix}.$$

6) операции с атрибутами

Теорема 28. Добавление нового фиктивного атрибута с компонентами $\varnothing$ в D-кортеж или в D-систему соответствует тому, что в эквивалентные им C-системы добавляется фиктивный атрибут с полными компонентами.

Теорема 29. В алгебре кортежей для операций $\neg$, $\cap_G$, $\cup_G$ и сравнений $=_G$, $\subseteq_G$, $\subset_G$ справедливы все законы алгебры множеств.

7) соотношения между АК и логическими исчислениями

Теорема 30. Если логической формуле A, не содержащей свободной переменной x, соответствует *АК*-объект R, в схеме отношения которого отсутствует атрибут X, то АК-объект $+X(R)$ соответствует логической формуле $\forall x(A)$.

Теорема 31. Если C-кортеж или C-система $R[\ldots X\ldots]$ – область истинности логической формулы $A(\ldots, x, \ldots)$ со свободной переменной x, то АК-объект $-X(R[\ldots X\ldots])$ – область истинности логической формулы $\exists x(A(\ldots, x, \ldots))$.

Теорема 32. Пусть $R[\ldots X\ldots]$ – D-кортеж или D-система, у которой отсутствуют D-кортежи с компонентами "*" в атрибуте X. Тогда для соответствующего этому АК-объекту предиката $P(\ldots, x, \ldots)$ формула $-X\ (R)$ соответствует формуле $\forall x(P)$.

Теорема 33. Если АК-объекты S_A и S_B – области истинности для логических формул A и B, то общезначимость импликации $A \supset B$ равносильна выполнению отношения $S_A \subseteq S_B$.

Теорема 34. Пусть посылки рассуждения выражены АК-объектами A_1, ..., A_n и задан АК-объект B. Тогда B есть следствие A_1, ..., A_n тогда и только тогда, когда $A_1 \cap_G \dots \cap_G A_n \cap_G \overline{B} = \varnothing$.

Теорема 35. Пусть заданы посылки A_1, ..., A_n и предполагаемое следствие B, выраженные структурами АК. Тогда алгоритм проверки правильности следствия B, для заданных посылок A_i заключается в вычислении обобщенных пересечений и проверке обобщенного включения: $(A_1 \cap_G \dots \cap_G A_n) \subseteq_G B$.

Теорема 36. Пусть $\boldsymbol{U} = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k$ – универсум, в котором все атрибуты имеют конечное множество значений, и в этом универсуме заданы выраженные АК-объектами посылки $A_1, \dots, A_n$. Тогда число возможных следствий из посылок A_i равно 2^N, где $N = |\boldsymbol{U}| - |A|$, а $A = A_1 \cap_G \dots \cap_G A_n$.

Приложение 2

Таблица соответствий между АК и исчислениями

Алгебра кортежей	**Исчисление высказываний и предикатов**
Элементарный кортеж, принадлежащий АК-объекту	Выполняющая подстановка соответствующей формулы
C-кортеж	Конъюнкция одноместных предикатов или высказываний
C-система	Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) или многоместный предикат
D-кортеж	Дизъюнкция одноместных предикатов или высказываний
D-система	Конъюнктивная нормальная форма (КНФ) или многоместный предикат
Непустой АК-объект	Выполнимая формула
АК-объект, равный универсуму	Тождественно истинная формула (тавтология)
АК-объект, равный $\varnothing$	Тождественно ложная формула (противоречие)
Операция добавление фиктивного атрибута	Правило обобщения: *из A следует* $\forall xA$ при условии, что в A отсутствует свободная переменная x
Операция $-X$ для C-кортежей и C-систем	Навешивание квантора $\exists xA$ при условии, что переменная x свободна в A.
Операция $-X$ для D-кортежей и D-систем	Навешивание квантора $\forall xA$ при условии, что переменная x свободна в A.
Включение одного АК-объекта в другой	Логический вывод, отношение выводимости

Список литературы

1. *Поварнин С.И.* Искусство спора. О теории и практике спора. – М.: Терра, 2009. https://stavroskrest.ru/sites/default/files/files/books/povarnin_spor.pdf

2. *Бурбаки Н.* Теория множеств. Книга 1. Основные структуры анализа. – М.: Мир, 1965. https://en.booksee.org/book/1509319

3. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. – М.: «Наука», 1971. https://booksee.org/book/469116

4. *Кулик Б.*А. Логика естественных рассуждений – СПб, Невский диалект, 2001. http://padabum.com/d.php?id=10390

5. *Кулик Б.А.* Обобщенный подход к моделированию и анализу интеллектуальных систем на основе алгебры кортежей. // Труды VI Междунар. конф. «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'07 (Москва, 29 января – 1 февраля 2007 г.), с. 679-715. https://studfile.net/preview/5616716/

6. *Кулик Б.А., Зуенко А.А., Фридман А.Я.* Алгебраический подход к интеллектуальной обработке данных и знаний. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010.

7. *Boris Kulik, Alexander Fridman*. N-ary Relations for Logical Analysis of Data and Knowledge, IGI Global, 2017,

8. *Кэрролл Л*. История с узелками. – М.: Мир, 1973.

9. *Кривоносов А.Т.* Язык. Логика. Мышление. Умозаключение в естественном языке. - М., Нью-Йорк: ВАЛАНГ, 1996.

10. *Стяжкин Н. И.* Формирование математической логики. – М., Наука, 1967.

11. *Эйлер Л.* Письма к немецкой принцессе о разных физических и философских материях. – СПб. Наука, 2002.

12. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В*. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972.

13. *Арутюнова Н.Д.* Метафора и дискурс. В кн. Теория метафоры: Сборник: М.: Прогресс, 1990. С. 5-32.

14. *Лагута О.Н.* Метафорология: теоретические аспекты. Ч. 1. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т., 2003.

15. *Ricoeur P.* La métaphore vive. Paris: Éditions du Seuil, 1975.

16. *Мелихов А.Н.* Ориентированные графы и конечные автоматы. – М.: Наука, 1971.

17. *Смаллиан Р.М*. Принцесса или тигр? – М.: Мир, 1986.

18. *Поспелов Д. А.* Моделирование рассуждений. Опыт анализа мыслительных актов. – М.: Радио и связь, 1989.

19. *Чень Ч., Ли Р.* Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. – М., Наука. 1983.

20. *Смаллиан Р.* Как же называется эта книга? – М.: Издательский дом Мещерякова, 2007.

21. *Рассел С., Норвиг П.* Искусственный интеллект: современный подход. 2-е изд. М.: Изд. дом «Вильямс», 2006.

9 785732 511666

НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Борис Александрович **КУЛИК**

ЛОГИКА И МАТЕМАТИКА:
просто о сложных методах логического анализа

Издание выходит в авторской редакции
Оригинал-макет подготовлен автором

Подписано в печать 19.10.2020. Формат издания 60×90 $^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура Times. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 9,0. Уч.-изд. л. 9,6. Тираж 100. Заказ 3038.

АО «Издательство «Политехника».
191023, Санкт-Петербург, Инженерная ул., д. 6.

Отпечатано в типографии ООО «Контраст».
192029, Санкт-Петербург, пр. Обуховской Обороны, д. 38, лит. А.